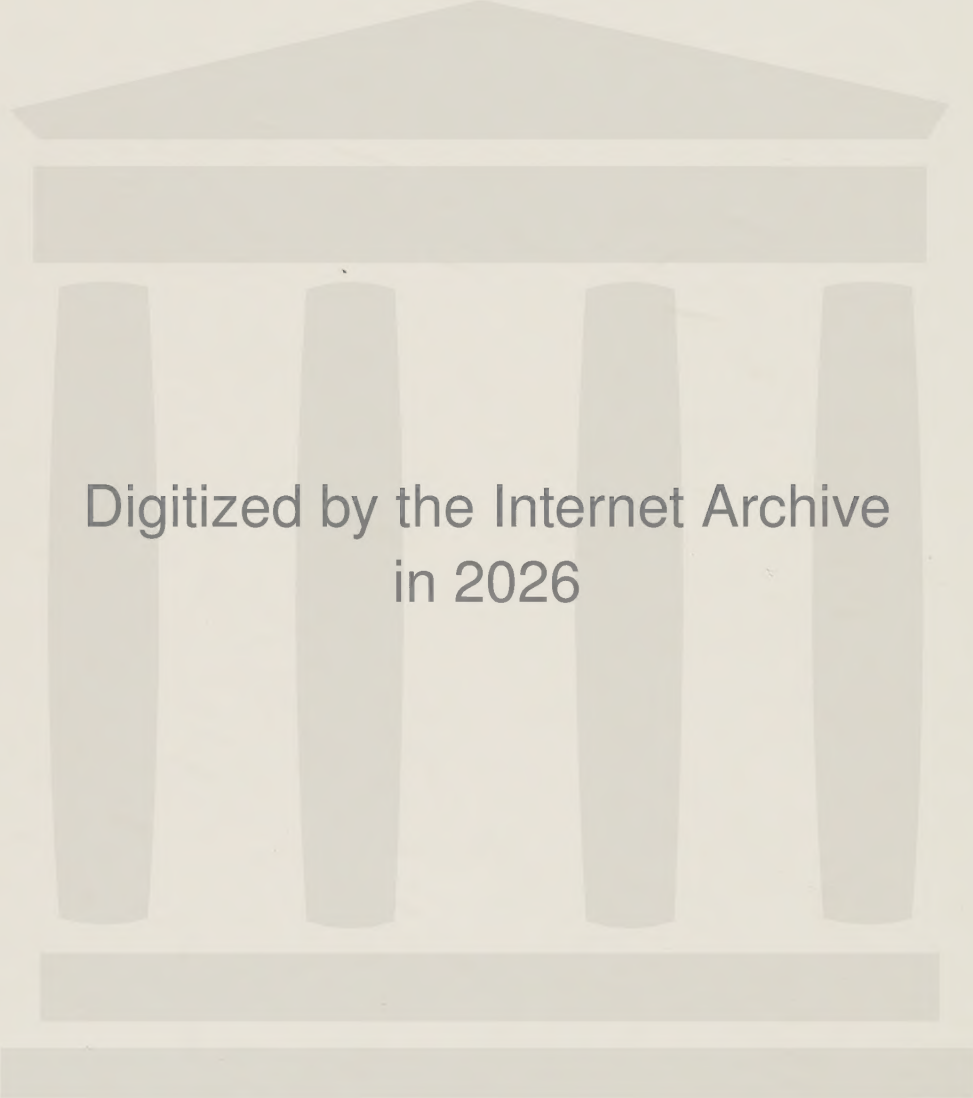


V. Ruck

Frankfurt "u 1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550826_0005

PIONENKONDENSATION IN HOCHANGEREGETER KERNMATERIE

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik der

Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt a. M.



von

Viola Ruck

aus Klausenburg

Frankfurt am Main

1977



**Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Universität Frankfurt am Main**

Dekan:

Prof. Dr. E. Schopper

Erster Gutachter:

Prof. Dr. W. Greiner

Zweiter Gutachter:

Prof. Dr. R. Dreizler

Tag der mündlichen Prüfung: 7. März 1977

Abstract

The pion spectrum in dense nuclear matter for finite temperatures is investigated. The critical densities and temperatures at which pion condensation occurs are calculated within models taking into account strong P- and S-wave πN interactions, $\pi\Delta_{33}$ interactions as well as nuclear correlations. The critical temperature that marks the beginning of a second order phase transition due to pion condensation is given in a phase diagram. The possibility of effects of pion condensation in heavy ion collisions, where dense nuclear matter in a highly excited state (high temperatures) is formed, is discussed.

INHALTSVERZEICHNIS

1.	<u>Einleitung</u>	6
2.	<u>Phasenübergänge</u>	10
2.1	Definition der Phasenübergänge	11
2.2	Beispiele: Suprafluidität, Supraleitung, magnetische Phasenübergänge, Laser Übergänge	18
2.3	Kritische Phänomene	28
2.4	Pionenkondensation - Phasenübergang der Kern- materie	36
3.	<u>Die Pion-Nukleon Wechselwirkungen in unendlicher Kernmaterie</u>	41
3.1	Die Lagrangefunktion der Wechselwirkung	41
3.2	Kernmaterie mit endlicher Temperatur	47
4.	<u>Der Pionen Propagator in unendlicher Kernmaterie</u>	49
4.1	Entwicklung des Pionen Propagators nach Feynman Diagrammen	51
4.2	Die Nukleon-Nukleon Korrelation	68
4.3	Die Nukleon-Delta (Δ_{33}) Korrelation	75
5.	<u>Das Energiespektrum der Pionen in dichter Kernmaterie und seine Interpretation</u>	84
5.1	Die Dispersionsgleichung der Pionen in der Kernmaterie	84

5.2	Das Energiespektrum	86
5.3	Kriterien für die Pionenkondensation	98
6.	<u>Das Phasendiagramm der Pionenkondensation</u>	101
6.1	Das Temperatur-Dichte Diagramm	101
7.	<u>Anwendungen und Ausblick</u>	104
7.1	Pionenkondensation in Atomkernen	104
7.2	Pionenkondensation in Neutronensternen	107
	Figurenbeschreibung	109
	Figuren	113
Anhang 1	Die temperaturabhängige Greens-Funktion	123
Anhang 2	Feynman Regeln in der Feldtheorie bei endlichen Temperaturen	129
Anhang 3a	Berechnung der Funktion $\phi(k, \omega)$	132
Anhang 3b	Berechnung der Funktion $\phi(k, \omega, \tau)$	137
Anhang 4a	Die Grundlage von Landau's Fermi-Flüssigkeits- theorie	140
Anhang 4b	Der Vertex-Anteil (Streuamplitude) Γ der Quasi-Teilchen im Fermi System	144
Anhang 4c	Der Vertex $\mathcal{J}$ der Pion-Nukleon Wechselwirkung.	151

Masssystem	154
Literaturverzeichnis	155
Danksagung	170
Lebenslauf	171

1. Einleitung

Die Erzeugung von extrem starken elektrischen und magnetischen Feldern im Laboratorium ist erst seit dem Bau von Schwerionenbeschleunigern und von starken Lasern möglich geworden. Die experimentelle Entwicklung wird von einem zunehmenden Interesse der theoretischen Physik an den Vorgängen in kritischen Feldern begleitet. Während die kritischen Erscheinungen in starken Coulombfeldern, d.h. das Eintauschen der innersten gebundenen Elektronenniveaus in das Kontinuum des Dirac Sees^{1, 2, 3, 4, 125}, im Labor verifiziert werden können, sind die kritischen Phänomene in stark wechselwirkender überkritischer Kernmaterie (Pionenkondensation), in starken Gravitationsfeldern^{5, 126} (schwarze Löcher) und in überkritischen Magnetfeldern⁶ zunächst nur von astrophysikalischer Bedeutung. Allerdings scheint es möglich, das Auftreten von Pionenkondensation auch bei zentralen Stößen von Schwerionen zu beobachten⁷.

Das Konzept der Pionenkondensation wurde 1971 von Migdal in einer Arbeit⁸ über die Polarisierung des Vakuums in starken Feldern entworfen. Wir wiederholen kurz den Gedankengang dieser Arbeit. Falls die Energiedifferenz zwischen den gebundenen Zuständen von Teilchen und Antiteilchen in einem äusseren Feld gegen Null strebt, können Teilchen-Antiteilchen-Paare ohne Zufuhr von Energie erzeugt werden. Im Fall der Entstehung von Fermionen, z.B. die Erzeugung von Elektron-Positron Paaren in

kritischen Coulombfeldern, können aufgrund des Pauli-Prinzips nie mehrere Paare im gleichen kritischen Zustand entstehen. Bei der Erzeugung von Bosonen (Pionen) in starken Feldern gibt es keine Einschränkung durch das Pauli-Prinzip, d.h. es können beliebig viele Pionen in demselben Zustand existieren. Eine solche Ansammlung von Teilchen (Bosonen) nennt man ein Kondensat.

Im Zusammenhang mit diesem Phänomen verwendet man den zentralen Begriff der Instabilität des Spektrums der Pionen in der Kernmaterie. Unter Instabilität versteht man das Auftreten komplexer Energien. Im imaginären Teil der Energie sind zusätzliche Informationen über das System enthalten.

Die Rolle der Instabilitäten des Pionenspektrums wurde im Zusammenhang mit der Stabilität des Hartree-Fock Grundzustandes eines Vielteilchensystems in einer Reihe von Arbeiten¹¹⁴⁻¹¹⁷ schon vorher untersucht. Dabei wurde gezeigt, dass die Kernmaterie bei Anwesenheit von Instabilitäten in einen energetisch niedrigeren Grundzustand übergeht. Die pionischen Instabilitäten wurden unter verschiedenen Annahmen von Migdal⁹⁻²¹, Sawyer²²⁻²⁴, Brown²⁵⁻³² und anderen³³⁻⁶⁰ untersucht. Dabei wurde die Dichte der Kernmaterie, bei der die Pionenkondensation auftritt, berechnet. Abhängig von den Wechselwirkungen zwischen Pionen, Nukleonen und Resonanzen in der Kernmaterie, wurden kritische Dichten von $1/2 \rho_0 \leq \rho_c \leq 2 \rho_0$ berechnet, wobei $\rho_0 = .17 \text{ fm}^{-3} = .46 \text{ m}_x^3$ die normale Dichte der Kernmaterie ist. Die Rechnungen wurden für Neutronensterne ($Z = 0$) und symmetrische Kernmaterie ($N = Z$)

bei der Temperatur $T = 0$ (im Grundzustand), ausgeführt. Die Änderung der Zustandsgleichung der Kernmaterie, die aus diesem Phänomen folgt, wurde ebenfalls abgeschätzt.

Die Idee dieser Arbeit entstand aus der Beobachtung, dass alle vorangegangenen Arbeiten bezüglich der Pionenkondensation bei $T = 0$ ausgeführt wurden. Für abgekühlte Neutronensterne mit $T \approx 0$ sind die angewendeten Methoden gerechtfertigt. Will man aber die Situation in Schwerionenstößen und in nicht abgekühlten Neutronensternen (Übergangsstadium) untersuchen, so muss man zusätzlich zur Dichte eine Kerntemperatur zur Beschreibung der hochangeregten Kernmaterie einführen. Der Begriff der Kerntemperatur wurde z.B. in den Arbeiten^{113, 119, 120} definiert. In dieser Arbeit wird das Phasendiagramm für die Pionenkondensation in unendlich ausgedehnter, hochangeregter Kernmaterie als Funktion der Dichte und Temperatur berechnet. Es wird gezeigt, dass Pionenkondensate kollektiven Anregungen mit den Quantenzahlen eines Pions entsprechen. Die mit der Temperatur zunehmenden Störungen (Spin-Isospin Wellen) bewirken, dass ab einer Temperatur T_c , bei vorgegebener Dichte, keine Kondensation mehr möglich ist.

Die Möglichkeit der Existenz von Pionenkondensaten in Kernen und deren Effekte in Schwerionenstößen (kritische Streuung), sowie die Berücksichtigung der Temperatur beim Abkühlprozess von Neutronensternen werden diskutiert.

Im Kapitel 2 werden die Erscheinungsformen der Phasenübergänge erster und zweiter Ordnung diskutiert. Kapitel 3 enthält die Modell-Lagrangedichte für die Pion-Nukleon Wechselwirkung bei endlicher Temperatur. In Kapitel 4 wird der Pionenpropagator in unendlicher Kernmaterie unter Berücksichtigung verschiedener Korrelationen berechnet. Die Instabilitäten im Pionenspektrum sowie die Kriterien für deren Entstehung werden in Kapitel 5 berechnet. Die Resultate unserer Modell-Rechnungen sind in Kapitel 6 in Form von (T_c, ρ_c) Phasendiagrammen dargestellt. In Kapitel 7 werden schliesslich die möglichen Anwendungen des in dieser Arbeit entwickelten Modells für hochangeregte Kernmaterie besprochen.

2. Phasenübergänge⁶¹

Verschiedene Phasenübergänge, besonders diejenigen zweiter Ordnung, sind in den letzten Jahren eingehend untersucht worden. Bei diesen Phasenübergängen ist die Annäherung an die Übergangstemperatur (kritische Temperatur) T_c mit grossen Fluktuationen verschiedener thermodynamischer Grössen verbunden. In der unmittelbaren Nähe von T_c hat sich eine weitgehende Universalität herausgestellt, derart, dass sich bei verschiedenen Phasenübergängen analoge Grössen finden lassen, zwischen denen im kritischen Bereich die gleichen Beziehungen gelten.

Diese Phasenübergänge sind im allgemeinen für Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht definiert. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass ähnliche Phänomene in Systemen, die nicht im thermodynamischen Gleichgewicht sind, ebenfalls vorkommen, z. B. im Laser. Die Analogie schliesst Phänomene wie spontane Symmetrie-Brechung und kritische Fluktuationen ein. Dies ist wichtig, da nicht nur Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht kritische Erscheinungen zeigen, sondern auch solche, bei denen kein Gleichgewicht auftritt und die Umwandlung unter Energiefluss von aussen erzeugt und erhalten wird.

Im folgenden Kapitel erörtern wir den Begriff der Phasenübergänge, erklären ihre Eigenschaften auf Grund von Phasendiagrammen und diskutieren einzelne Beispiele.

Das Phänomen der Pionenkondensation in Kernmaterie - einer Phasenumwandlung zweiter Ordnung - fügen wir in unsere Betrachtung

tung der Phasenübergänge ein und besprechen die kritischen Erscheinungen, die in diesem System auftreten.

2.1 Definition der Phasenübergänge

Eine Phase ist im thermodynamischen Sinn ein makroskopisches System oder Subsystem von homogenem physikalischen und chemischen Aufbau, das sich im Gleichgewicht mit seiner Umgebung befindet. Eine Phasenumwandlung findet beim Übergang eines Systems aus einer thermodynamischen Phase in eine andere statt, wobei sich gewisse physikalische Eigenschaften (z. B. Dichte, spezifische Wärme, Brechungsindex, elektrische Leitfähigkeit, Wärmeleitung, spontane Magnetisierung) sprunghaft ändern.

Die meistbekannten Phasenumwandlungen sind die Änderungen des Aggregatzustandes von Materie: Verdampfen, Kondensieren, Sublimieren und Schmelzen.

Der Begriff der Phasenübergänge wurde in der klassischen Thermodynamik von Ehrenfest⁶² klassifiziert. Danach liegt eine Phasentransformation n -ter Ordnung vor, wenn alle Ableitungen des Gibbs'schen Potentials G bis zur Ordnung $n-1$ stetig sind, und mindestens eine Ableitung der Ordnung n unstetig ist. Zum Beispiel ist das Gibbs'sche Potential für Flüssigkeit $G(P, T, N) = \mu N + VP - ST$, wobei μ das chemische Potential, N die Zahl der Teilchen im System, V das Volumen, P der Druck, S die Entropie und T die Temperatur sind. Der Übergang von der flüssigen Phase in die Gasphase ist ein Phasenübergang

erster Ordnung, da das Volumen $V = \frac{\partial G}{\partial p} \Big|_T$ sich sprunghaft ändert. Eine andere Klassifikation wurde von Landau⁶³ aufgestellt. Landau unterstreicht die Rolle der Symmetrie für Phasenumwandlungen zweiter Ordnung und führt den Begriff des Ordnungsparameters η ein. Bei Umwandlungen mit Symmetrie-Änderung ist η so definiert, dass $\eta = 0$ für die mehr symmetrische Phase und $\eta \neq 0$ für die weniger symmetrische Phase gilt.

Ein Beispiel eines solchen Ordnungsparameters ist die Magnetisierung $\vec{M}$ in magnetischen Phasenübergängen, wo man $\vec{M} = 0$ für die paramagnetische (ungeordnete) und $\vec{M} \neq 0$ für die ferromagnetische Phase findet. Beim Übergang paramagnetisch - ferromagnetisch geht die Drehsymmetrie im Spinraum verloren.

Der Begriff des Ordnungsparameters wurde auch für Umwandlungen ohne Symmetrie-Änderung verallgemeinert.

Findet der Übergang des Parameters η in $\eta = 0$ abrupt statt, hat man einen Phasenübergang erster Ordnung; findet er kontinuierlich statt, liegt eine Phasenumwandlung zweiter Ordnung vor. Landau zeigt, dass der Verlust von Symmetrie-Elementen mit einer Unstetigkeit der spezifischen Wärme verbunden ist. In diesem Sinne fügt sich diese Klassifikation in den Rahmen der von Ehrenfest gegebenen ein.

Tisza⁶⁴ hat diese Klassifikationen erweitert, indem er zeigte, dass bei Phasenübergängen zweiter oder höherer Ordnung die n -ten Ableitungen thermodynamischer Potentiale nicht nur unstetig sind, sondern sogar divergieren (z.B. die spezifische Wärme im λ -Punkt des suprafluiden He II (siehe auch Fig. 2.5)).

Brenig⁶⁵ definiert eine weitere Phasenumwandlung, die sogenannte unscharfe Phasenumwandlung. Dies ist eine Umwandlung, bei der höhere Ableitungen stetig sind, die Phasenumwandlungstemperatur jedoch nicht mehr exakt definierbar ist – die Umwandlung findet in einem Temperaturbereich statt (siehe Fig. 2.1).

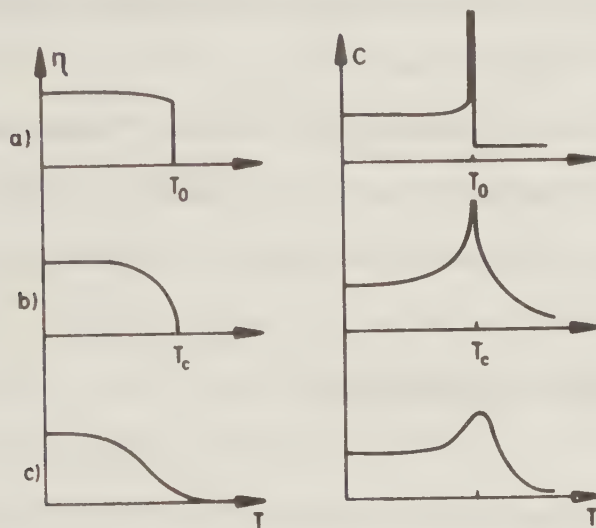


Fig. 2.1: Ordnungsparameter η und spezifische Wärme C bei Phasenumwandlungen: a) erster Ordnung; b) zweiter Ordnung oder kontinuierlich; c) unscharf. (Nach Brenig⁶⁵)

Die wichtigsten Typen von Phasenumwandlungen in der Natur sind solche von erster und zweiter Ordnung. Der unscharfe, völlig kontinuierliche Phasenübergang kommt bei amorphen Substanzen vor. Im nächsten Abschnitt werden die Eigenschaften verschiedener Arten von Phasenumwandlungen diskutiert und Beispiele mit Phasendiagrammen angegeben.

1) Phasenumwandlungen erster Art

Zu den Phasenumwandlungen erster Art gehören die oben genannten Änderungen des Aggregatzustandes. Das Charakteristische dieser Phasenumwandlungen ist, dass die Temperatur während des Prozesses konstant bleibt und die Umwandlung stets mit Volumenänderung, sowie mit Wärmezufuhr oder -abgabe verbunden ist.

Die Grenzkurven zwischen den einzelnen Phasen haben den Charakter von Stabilitätsgrenzen, in denen zwei oder mehrere Phasen im Gleichgewicht koexistieren.

2) Phasenumwandlungen zweiter Art

Die Phasenumwandlung zweiter Art ist stetig (kontinuierlich) in dem Sinne, dass sich der Zustand des Körpers kontinuierlich verändert. Dies bedeutet, dass keine Diskontinuitäten in den Größen, die den thermischen Zustand des Körpers beschreiben (z.B. Volumen, innere Energie), auftreten. Infolgedessen sind diese Umwandlungen nicht mit Wärmezufuhr oder -abgabe verbunden. Die zweite Ableitung der freien Energie (z.B. spezifische Wärme oder die Suszeptibilität) macht jedoch im Umwandlungspunkt (kritischer Punkt) einen Sprung oder besitzt hier eine Singularität.

Phasenumwandlungen zweiter Art bringen immer neue qualitative Eigenschaften des Körpers zustande. Diese können sich in neuer Symmetrie (z.B. im magnetischen Fall oder beim Übergang eines

festen Körpers von einer Kristallstruktur in eine andere), dem Verschwinden des elektrischen Widerstandes (bei Supraleitung) oder dem Verschwinden der inneren Viskosität (bei Suprafluidität) äussern.

Zustandsgleichungen und Phasendiagramme

Für verschiedene Phasen gilt jeweils eine eigene Zustandsgleichung, die einen funktionalen Zusammenhang der Zustandsgrössen im thermodynamischen Gleichgewicht darstellt. Ein Phasendiagramm ist die graphische Darstellung des Verhaltens eines Systems bei Änderung der Zustandsgrössen. Daraus sind die Existenzbereiche seiner Phasen, sowie die Grenzkurve zwischen diesen Phasenbereichen ablesbar.

In Fig. 2.2a ist das schematische Zustandsdiagramm einer Flüssigkeit (z.B. Wasser) angegeben.

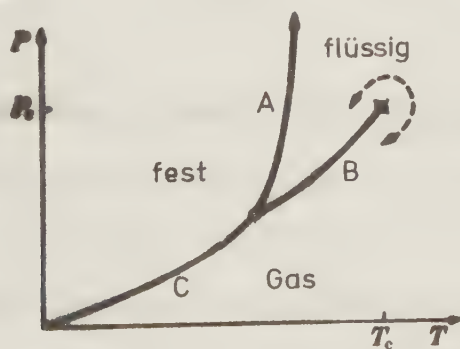


Fig. 2.2a: Zustandsdiagramm einer Flüssigkeit. Die Kurve A ist die Schmelzkurve, B - die Dampfdruckkurve, C - die Sublimationskurve. (Nach Stanley⁶⁶)

Die Grenzkurven trennen die Phasen fest, flüssig und gasförmig; ein Überqueren der Grenzkurven entspricht einer Phasentransformation. Auf einer Grenzkurve existieren je zwei Phasen (Dampf - Flüssigkeit, Dampf - Eis, Eis - Flüssigkeit) im Gleichgewicht. Im Tripelpunkt koexistieren alle drei Phasen. Die Koexistenz wird dadurch ermöglicht, dass nur der quantitative Unterschied verschiedener Dichten zwischen den Phasen besteht.

Der Ordnungsparameter ist die Differenz der Dichten zweier aneinander angrenzender Phasen (Fig. 2.2b für Flüssigkeit - Gas).

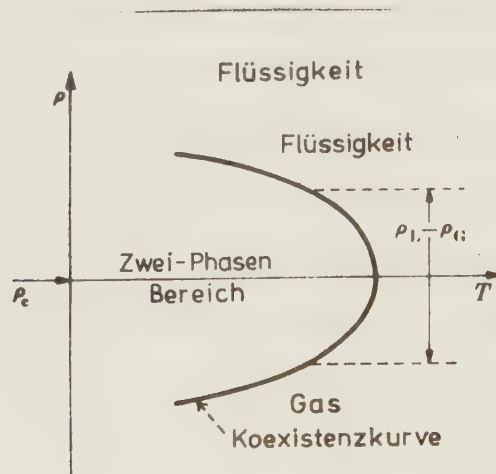


Fig. 2.2b: Ordnungsparameter als Funktion der Temperatur für das Flüssigkeit - Gas System. (Nach Stanley⁶⁶)

Für jeden Punkt der Dampfdruckkurve ausser am Schnittpunkt mit der Temperaturachse (Endpunkt der Dampfdruckkurve) macht der Ordnungsparameter einen Sprung beim Übergang von einer Phase in die andere. Demzufolge berechnet man den Vorgang als Phasenumwandlung erster Ordnung.

Der Endpunkt der Dampfdruckkurve ist vor allen anderen Punkten ausgezeichnet, da hier der Übergang völlig kontinuierlich stattfindet, $p_L - p_G \rightarrow 0$ kontinuierlich. Dieser Punkt entspricht deshalb dem kritischen Punkt einer Phasenumwandlung zweiter Ordnung.

Ein komplexeres Zustandsdiagramm ist das des Kohlenstoffs (Fig. 2.3).

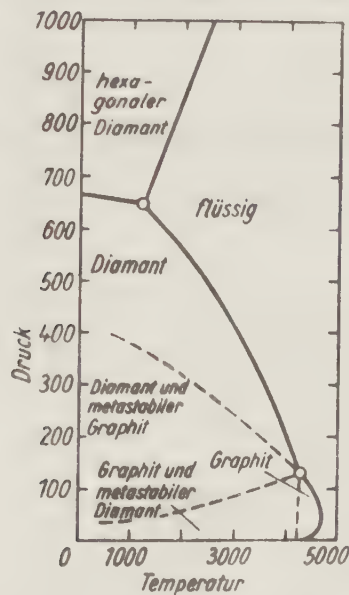


Fig. 2.3: Zustandsdiagramm des Kohlenstoffs. (Nach Ref. 66)

Hier ist die Grenzkurve zwischen der flüssigen und festen Phase von erster Ordnung. Alle Grenzkurven innerhalb des festen Aggregatzustandes sind von zweiter Ordnung. Auf der Grenzkurve, die den normalen Diamanten (kubische Symmetrie) vom hexagonalen Diamanten trennt, können diese beiden Phasen nicht koexistieren, weil der Kohlenstoff nicht gleichzeitig in zwei Symmetrieformen

auftreten kann. Es ist für eine Phasenumwandlung zweiter Ordnung typisch, dass die beiden Endphasen qualitativ voneinander verschieden sind und die Umwandlung kontinuierlich stattfindet.

2.2 Beispiele

Für die vorliegende Arbeit sind die Phasenumwandlungen zweiter Art ausschlaggebend, da das Phänomen der Pionenkondensation in diese Kategorie fällt.

1) Suprafluidität ist eine Eigenschaft der als He II bekannten Phase des flüssigen Heliums ^4He .

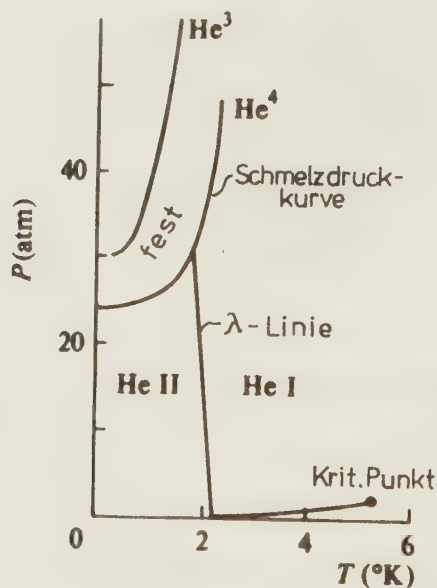


Fig. 2.4: Druck - Temperatur - Zustandsdiagramm des Heliums.
(Nach Fetter et al.⁶⁸)

Suprafluidität tritt bei Abkühlung des He I unter dem sog. Lambdapunkt $T_\lambda = 2.1^\circ\text{K}$ auf, wobei die Viskosität sprunghaft auf sehr kleine Werte sinkt. Da am λ -Punkt die spezifische Dichte einen Knick hat und die spezifische Wärme (die zweite Ableitung der inneren Energie) divergiert, (Fig. 2.5), stellt die Umwandlung von He I in He II eine Phasenumwandlung zweiter Art dar.

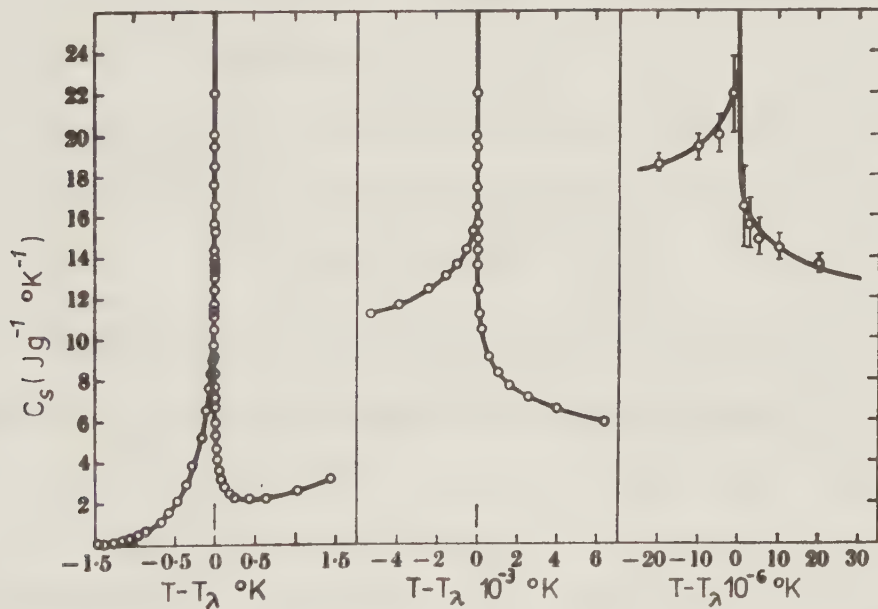


Fig. 2.5: Spezifische Wärme C_s des flüssigen Heliums in der Nähe des λ -Punktes. Die Struktur des λ -Punktes bei immer stärkerer Auflösung der Temperaturskala zeigt, dass C_s in T_λ eine echte Divergenz hat. (Nach Stanley⁶⁶)

2) Supraleitung tritt bei einigen Metallen, nach Abkühlung unter eine für das jeweilige Metall charakteristische Temperatur, auf. Bei dieser Temperatur verschwindet der elektrische Widerstand R sprunghaft (Fig. 2.6).

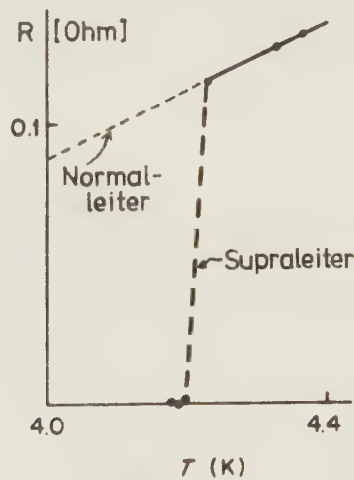


Fig. 2.6: Widerstandsverlauf eines Normalleiters und eines Supraleiters in Abhängigkeit von der Temperatur.
(Nach Ref. 69)

Bei diesem Phänomen tritt zwar keine Volumenänderung auf, jedoch ein Sprung in der spezifischen Wärme (Fig. 2.7). Die Supraleitung ist demzufolge eine Phasenumwandlung zweiter Art, bei der sich die makroskopischen Eigenschaften des Körpers qualitativ verändern. Durch ein genügend starkes Magnetfeld kann der supraleitende Zustand aufgehoben werden (Fig. 2.8).

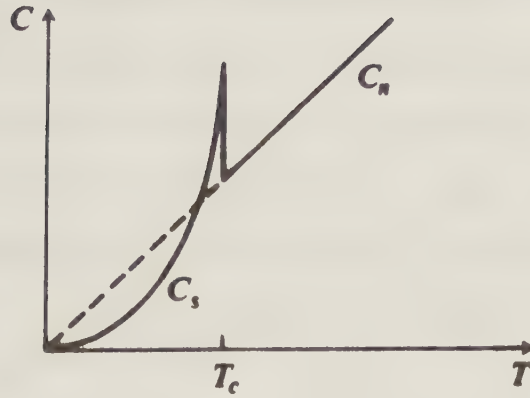


Fig. 2.7: Schematisches Diagramm der spezifischen Wärme im Supraleiter. C_n ist die spezifische Wärme im normalen Zustand, C_s im supraleitenden Zustand. (Nach Fetter et al.⁶⁸)

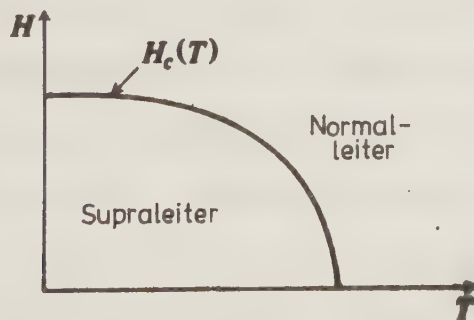


Fig. 2.8: Phasendiagramm als Funktion des magnetischen Feldes H und der Temperatur T . Das Diagramm zeigt die supraleitenden und normalleitenden Bereiche. (Nach Fetter et al.⁶⁸)

Die mikroskopische Theorie zeigt, dass die Supraleitung mit der Existenz von gebundenen Leitungselektronen (Cooper - Paare) unterhalb des kritischen Punktes verbunden ist. Auf Grund der Paarbildung benötigt man eine Mindestenergie (Energieslücke Δ), um Supraleitung anzuregen. Diese Energieslücke ist für die thermischen, optischen und elektromagnetischen Eigenschaften des Supraleiters verantwortlich und kann als Ordnungsparameter verwendet werden (siehe auch Fig. 2.14).

3) Magnetische Phasenübergänge sind besonders bei ferromagnetischen (mit parallel ausgerichteten Spins) und antiferromagnetischen (mit antiparallelen Spins) Substanzen ausgeprägt, die oberhalb einer für die betreffende Stoffart charakteristischen Temperatur (Curie-Punkt) in einen paramagnetischen (ungeordneten) Zustand übergehen.

Magnetische Phasen treten in bestimmten Temperaturbereichen auf und sind an den kristallinen Zustand gebunden. Die quantenmechanische Erklärung dieses Vorgangs ist die folgende:

Die magnetischen Elementarmomente, die in den Gitterpunkten des Kristalls lokalisiert sind, können sich nicht unabhängig voneinander bewegen, sondern sind durch Austauschkräfte aneinander gekoppelt. Diese Wechselwirkungen bewirken eine regelmässige Ausrichtung der Elementarmagnete und daraus resultierend eine Ausrichtung der Spins. Die Ausrichtung wiederum führt zu einer endlichen Magnetisierung $\vec{M}$. Die ferromagnetische (antiferromagnetische) Phase kann unterhalb der Curie (Néel) - Temperatur

aufrechterhalten werden. Mit zunehmender Temperatur wachsen die thermischen Störungen der Spinstruktur, bis diese durch Anregung von Spinwellen (Fig. 2.9a) mehr und mehr zerstört wird (paramagnetische Phase) und die Magnetisierung verschwindet.



Fig. 2.9a: (a) Grundzustand eines einfachen Ferromagneten im klassischen Bild; alle Spins stehen parallel. (b) Eine mögliche Anregung: ein Spin ist umgeklappt. (c) Die energetisch tiefliegenden Anregungszustände sind Spinwellen. Dabei präzessieren die Enden der Spinvektoren auf Kegelmänteln, und aufeinanderfolgende Spins weisen eine Phasenvoreilung um einen konstanten Winkel auf. (Nach Kittel⁷⁰)

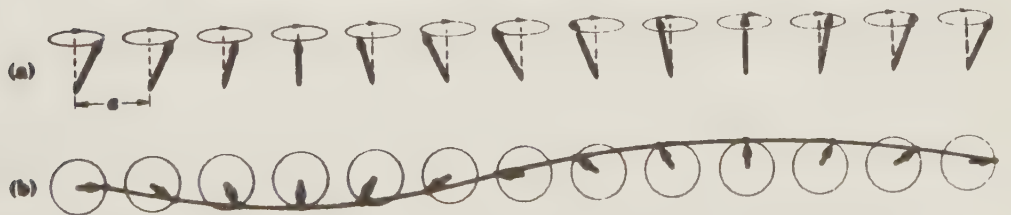


Fig. 2.9b: Spinwelle in einer Kette von Spins. (a) Perspektivische Darstellung. (b) Spins von oben gesehen; eine Wellenlänge ist eingezeichnet; die Wellenlinie läuft durch die Spitzen der Spinvektoren. (Nach Kittel⁷⁰)

Spinwellen sind Elementaranregungen, die Quantenzustände über dem Grundzustand bilden. Sie haben kollektiven Charakter (sind Eigenschaft aller Spins im Gitter), breiten sich wellenförmig durch den Körper aus und bestehen aus periodischen Abweichungen der Spinvektoren von der Richtung der Spinstruktur (Fig. 2.9b). Das bewirkt Störungen in der Fernordnung, die schliesslich bei der Curie-Temperatur völlig zusammenbricht. In diesem Punkt hat die Suszeptibilität χ eine Singularität (Fig. 2.10), und die spezifische Wärme divergiert (Fig. 2.11).

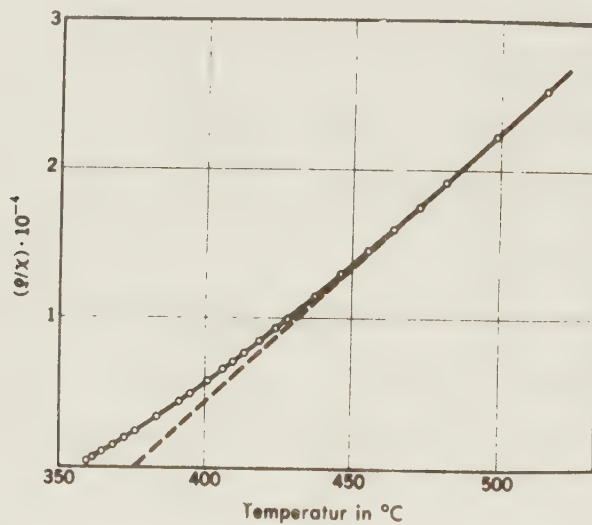


Fig. 2.10: Kehrwert der Massensuszeptibilität von Ni. Der Schnitt der Kurve mit der Abszisse bedeutet also Auftreten von Ferromagnetismus. Dieser Punkt gibt die Curie-Temperatur an. (Nach Kittel⁷⁰)

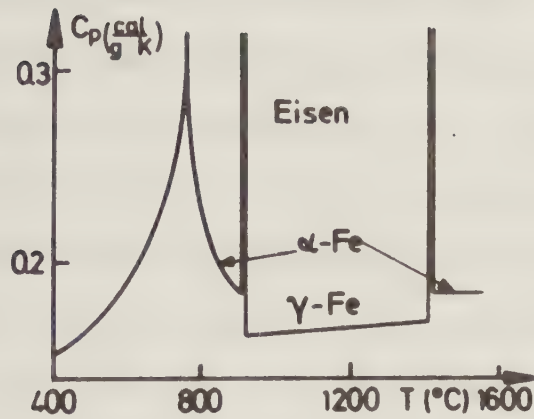


Fig. 2.11: Spezifische Wärme des Eisens. (Nach Brenig⁶⁵)

Oberhalb dieser kritischen Temperatur tritt der paramagnetische Zustand $\vec{M} = 0$ auf (Fig. 2.12).

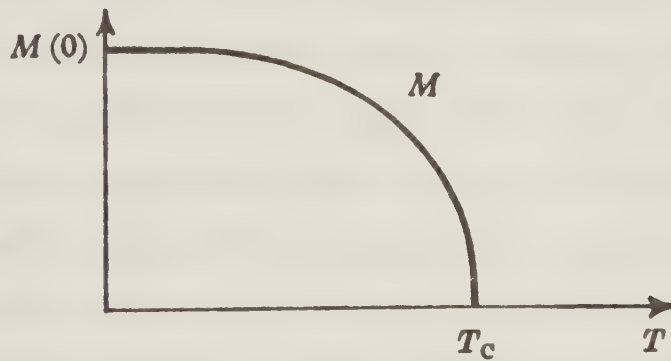


Fig. 2.12: Temperaturabhängigkeit der spontanen Magnetisierung $M(0)$ (kein äusseres Magnetfeld) von Ferromagneten. T_c ist die ferromagnetische Curie-Temperatur. (Nach Stanley⁶⁶)

Der geordnete Zustand kann auch durch ein äusseres magnetisches Feld verstärkt oder überhaupt hervorgerufen werden, das die Entartung in der Ausrichtung der Spins aufhebt.

Für ferromagnetische Übergänge kann man die Magnetisierung ($\vec{M} = 0$ für die ungeordnete und $\vec{M} \neq 0$ für die geordnete Phase) als Ordnungsparameter wählen, und das magnetische Feld spielt die Rolle des thermodynamisch konjugierten Feldes, d.h. $H = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial F}{\partial M} \right)_T$ wobei F die freie Energie ist.

4) Laser Übergänge

Ein Übergang aus einer ungeordneten in eine geordnete Phase, auf Grund der Änderung von äusseren Parametern, findet auch im Laser statt.⁷¹

Ein Laser besteht aus einer Ansammlung strahlungsaktiver Atome in einer optischen Kavität, welche von einer äusseren Energiequelle angeregt wird. Liefert diese Quelle eine Energie, die unter einer bestimmten kritischen Pump-Leistung liegt, so funktioniert die Kavität als eine einfache Lampe, und die Atome senden Wellen mit beliebigen, voneinander unabhängigen Phasen aus. Überschreitet die Pump-Leistung diese kritische Schwelle, werden die Atome "geordnet", so dass die ausgesendeten Wellen kohärent ausgestrahlt werden und eine stimulierte Emission überwiegt.

Der Laser ist nicht im thermodynamischen Gleichgewicht, trotzdem besteht zwischen der Beschreibung dieser Vorgänge und der von Landau entwickelten Theorie der Phasenübergänge zweiter Ordnung von Systemen im thermodynamischen Gleichgewicht eine Analogie. Dies ist ein interessantes Ergebnis, da man diese

Analogie kaum erwartet hat. Im Falle des Lasers wird der "geordnete" Zustand von einem Energie-Fluss erzeugt und aufrechterhalten, d.h. das System ist nicht geschlossen und nicht im thermodynamischen Gleichgewicht.

Die Analogie, z.B. zur Theorie der Ferromagneten, wird klar, wenn man bemerkt, dass in der Theorie des Lasers ein selbstkonsistentes Strahlungsfeld auftritt. Im Laser ist jedes einzelne Atom ein strahlender Dipol im elektromagnetischen Feld der anderen Atome. Die Felder aller Atome summieren sich selbstkonsistent auf, jedes Atom trägt zum resultierenden elektromagnetischen Feld bei, genau wie die Spins im Ferromagneten zur Magnetisierung beitragen. Der Ordnungsparameter ist das elektrische Feld des Lasers $\vec{E}$, $\vec{E} = 0$ für die ungeordnete Phase, $\vec{E} \neq 0$ für die geordnete Phase. Das konjugierte Feld (Analogon des äusseren magnetischen Feldes beim Ferromagneten) ist die zusätzliche Polarisierung S im strahlungsaktiven Medium, erzeugt von dem in der optischen Kavität injizierten Signal der Energie-Quelle.

Die Divergenz der Laser-Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial E}{\partial S}$ wurde experimentell bestätigt.⁸³ Es wurde experimentell bewiesen, dass in der Nähe des kritischen Punktes die Amplitude und die Zerfallszeit der Fluktuationen grösser werden, was man mit einer "weichen" kritischen Anregung in Zusammenhang bringen kann.

In den Laser-Übergängen hat man eine spontane Rotations - Symmetrie - Brechung, die durch die Ausrichtung der Atom - Dipole erzeugt wird, ähnlich zur Ausrichtung der Spins beim Ferromagneten.

2.3 Kritische Phänomene

In den kritischen Punkten der Phasenumwandlungen zweiter Ordnung – in denen ein System von einer Phase kontinuierlich in eine andere übergeht – treten neuartige Phänomene auf, die nur diesen Punkten eigen sind. Bei Entfernung von diesen Punkten verschwinden diese Phänomene wieder. Im allgemeinen besteht im kritischen Punkt nur ein qualitativer Unterschied zwischen den Phasen.

Nach dem Typ des Ordnungsparameters unterscheidet man zwei Arten von kritischen Punkten⁶⁴:

Typ (a) ist charakterisiert durch eine thermodynamische Variable als Ordnungsparameter (z.B. Dichte, Magnetisierung, Konzentration...) (Fig. 2.13). Die thermodynamisch konjugierten Felder existieren und sind physikalisch reell (können direkt experimentell gemessen werden), z.B. das chemische Potential oder das Magnetfeld.

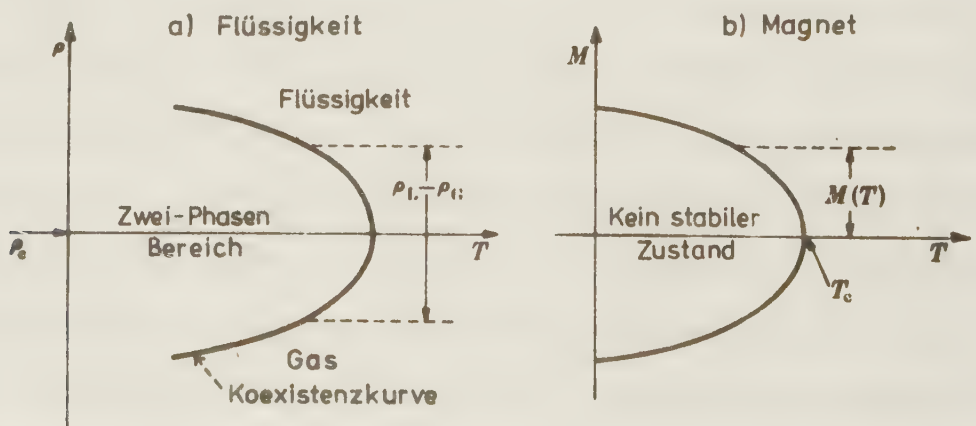


Fig. 2.13: Ordnungsparameter als Funktion der Temperatur für a) das Flüssigkeit-Gas System, b) das ferromagnetische System. (Nach Stanley⁶⁶)

Typ (b) ist charakterisiert durch einen "inneren" (quasi-thermodynamischen) Parameter als Ordnungsparameter (z.B. die Wellenfunktion $\langle \Psi \rangle$ des supraflüssigen "Kondensates" im Falle der Supraflüssigkeit, die lokale Magnetisierung (auf Teilgitter) für Antiferromagneten und die Energielücke Δ für Supraleitung (Fig. 2.14)). Die konjugierten Felder sind nicht physikalisch.

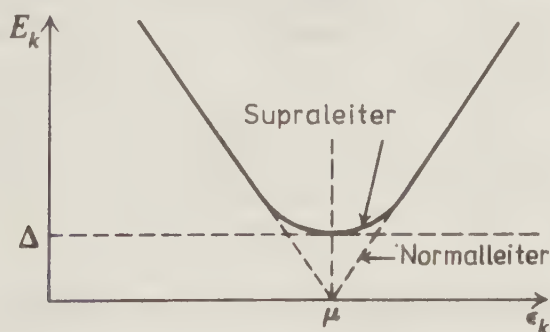


Fig. 2.14: Vergleich der Anregungsspektren für Normal- und Supraleiter. Der Ordnungsparameter Δ taucht nur bei Supraleitern auf. (Nach Fetter et al.⁶⁸)

Beide Typen von kritischen Punkten zeigen kritische Phänomene, die durch eine starke Fluktuation der Ordnungsparameter charakterisiert werden. Das Entstehen der kritischen Phänomene ist von Singularitäten verschiedener Suszeptibilitäten begleitet. Bei den kritischen Punkten vom Typ (a), die mit cluster-Bildung (Bevorzugung gleicher Nachbarn, z.B. Ferromagneten $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\dots$) verbunden sind, divergieren die verallgemeinerten Suszeptibilitäten. Im Falle kritischer Punkte des Typs (b) (mit Nahordnung - Bevorzugung ungleicher Nachbarn, z.B. Antiferromagneten $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\dots$)

und Auftritt periodischer Strukturen) zeigen die verallgemeinerten Suszeptibilitäten einen endlichen Sprung (siehe Fig. 2.15).

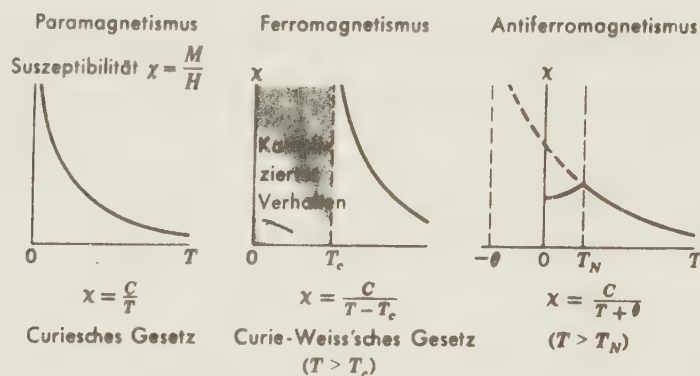


Fig. 2.15: Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität von Paramagneten, Ferromagneten und Antiferromagneten. Unterhalb der Néel-Temperatur eines Antiferromagneten sind die Spins antiparallel angeordnet; die Suszeptibilität erreicht ihren Maximalwert bei T_N ; an dieser Stelle tritt in der Kurve χ von T ein wohldefinierter Knick auf. (Nach Kittel⁷⁰)

Dadurch ist auch das Erscheinungsbild der Phänomene, entsprechend den zwei Typen von kritischen Punkten, unterschiedlich. Bei Typ (a) zeigt sich erhöhte Vorwärts-Streuung in der Nähe des kritischen Punktes (kritische Opaleszenz)(Fig. 2.16a), während bei Typ (b) grosse Schwankungen in einzelnen "Teilgittern" auftreten, obwohl im System als Ganzes die Fluktuationen normal sind.

Bei der Streuung von Neutronen an einem Antiferromagneten, findet in der Nähe des kritischen Punktes, in jedem Teilgitter eine dem Ferromagneten ähnliche Kleinwinkelstreuung statt. Die Interferenz der Vorwärtsstreuamplituden bewirkt ein Linienspektrum, das sich zu dem geometrischen Diffraktionsspektrum (temperaturabhängig) addiert. Die antiferromagnetischen Diffraktionslinien verschwinden oberhalb der Néel Temperatur (Fig. 2.16b)

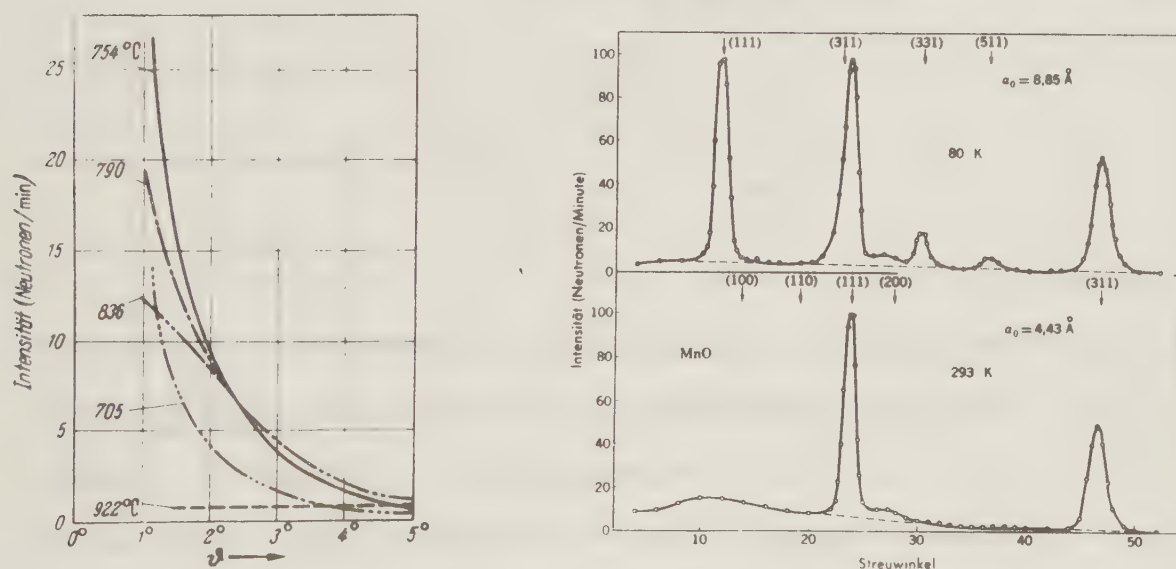


Fig. 2.16: Kritische Streuung für Ferromagneten und Antiferromagneten. (a) Kritische Streuung von Neutronen an Eisen in der Umgebung des Curie-Punktes $T_c = 754^\circ\text{C}$ (nach Ref. 72); (b) Neutronenbeugungsaufnahme von MnO unterhalb und oberhalb der Néel Temperatur $T_c = 120^\circ\text{K}$ (nach Ref. 73).

Der Zusammenhang zwischen Kleinwinkelstreuung und Atomverteilung (oder Spin Anordnung) ist in Fig. 2.17 gezeigt.

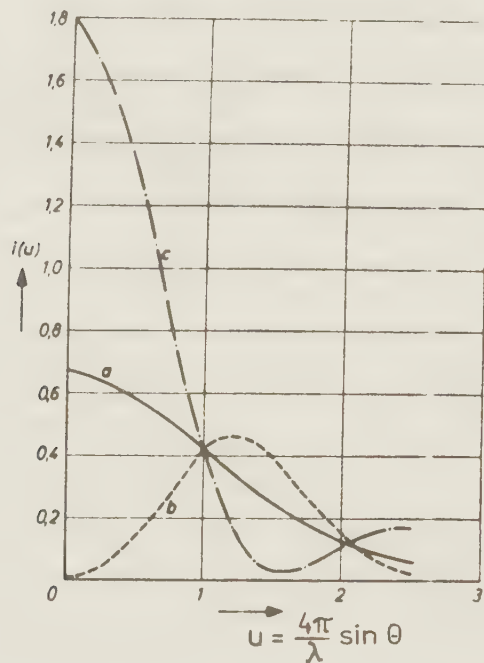


Fig. 2.17: Berechnete Streukurven. (a) Ungeordnete Atomverteilung; (b) Nahordnung (Bevorzugung ungleicher Nachbarn, z.B. Antiferromagnet); (c) Cluster-Bildung (Bevorzugung gleicher Nachbarn, z.B. Ferromagnet). Entnommen aus A. Münster und K. Sagel⁷⁴.

In der Nähe der kritischen Punkte entsteht eine langreichweitige Korrelation, während sonst im System nur kurzreichweitige Wechselwirkungen existieren. In Ferromagneten sind diese Wechselwirkungen von der Größenordnung der Reichweite der Austauschwechselwirkung zwischen Nachbarspins. In der Nähe des kritischen Punktes wird jedoch eine extrem langreichweitige Korrelation

aufgebaut, die in eine bestimmte Richtung "ordnet". Diese "Ordnung" ist im kritischen Punkt äusserst langreichweitig, während entfernt von diesem Punkt diese "Fernsteuerung" gänzlich fehlt (siehe Fig. 2.18).

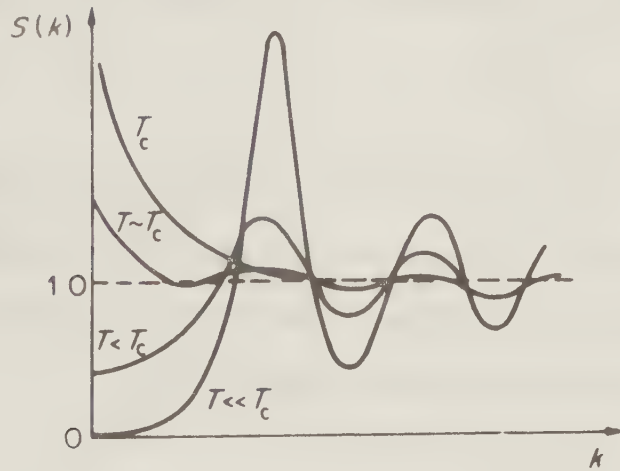


Fig. 2.18: Die Entwicklung des $k \rightarrow 0$ (grosse Wellenlängen) Bereiches des Struktur-Faktors $S(k)$ in der Nähe des kritischen Punktes einer Flüssigkeit. $S(k)$ ist die räumliche Fourier-Transformierte der Dichte-Korrelationsfunktion.

Die sehr langsame Annäherung an den Grenzwert 1 für $k \rightarrow \infty$ bedeutet, dass die Korrelationsfunktion sehr langreichweitig wird, d.h. gegen Null langsam abfällt. (Nach Croxton⁷⁵)

Die sogenannte "Fernsteuerung" ist ein Merkmal des kritischen Punktes und ein Hinweis für das Auftreten kollektiver Phänomene.

In diesem Punkt werden die kollektiven Anregungen "weich", d.h. ihre charakteristischen Frequenzen gehen gegen Null, und man kann ohne Energieaufwand diese kollektiven Zustände anregen.

In Tabelle I fassen wir die wesentlichen Grössen für den Phasenübergang II. Ordnung für verschiedene Systeme zusammen.

Tabelle I: Ordnungsparameter, konjugiertes thermodynamisches Feld (welches die Entartung aufhebt), zugehörige Suszeptibilität und kritische Anregung für typische Phasenübergänge.

SYSTEM	ORDNUNGS- PARAMETER	KONJUGIER- TES FELD	SUSZEPTI- BILITÄT	"KRITISCHE ANREGUNG"
Ferro- magnet	$\vec{M}$ Magnetisi- erung	$\vec{H}$ magnetisches Feld	$\chi_T = \frac{\partial M}{\partial H} \Big _T$	Spin-Fluktuationen (Fluktuationen der Magnetisierung)
Flüssig- keits- Gas System	$\rho_F - \rho_G$ Dichten	μ chemisches Potential	$K_T n^2 = \frac{\partial \rho}{\partial \mu}$	Dichte - Fluktuationen kritische Opaleszenz
Ferro- elektrikum	$\vec{P}$ dielektri- sche Polari- sierung	$\vec{E}$ elektri- sches Feld	$\chi = \frac{\partial P}{\partial E}$	Polarisations - Fluktuationen
Entmischung binärer Legierungen	x_1, x_2 Konzentra- tion	$\Delta \mu$ chemisches Potential	$\chi = \frac{\partial x}{\partial \mu}$	Fluktuationen der Konzentration
Laser	$\vec{E}$ elektrisches Feld	$\vec{S}$ zusätzli- che Pola- risation aktiver Atome	$\chi = \frac{\partial E}{\partial S}$	Fluktuation der elektrischen Feld-Amplitude
Supra- flüssig- keit	$\langle \psi \rangle$	$\emptyset$ nicht physikal.	$\chi = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial \emptyset}$	Wärmediffusion
Supra- leiter	$\langle \psi \rangle$ (oder Δ in der BCS Theorie)	$\emptyset$ nicht physika- lisch	$\chi = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial \emptyset}$	Wärmediffusion
Überstruk- tur Umwan- dlungen in binären Legierungen	η Fern- ordnungs Parameter	nicht physika- lisch	$\chi_S = \sum_p (R)$ Korrela- tions Funktion	Fluktuation von η Zusätzliche Linien im Röntgenspektrum
Antiferro- magnet	$\vec{M}_S$ Sublattice Magnetisi- erung	χ nicht physika- lisch	χ	Spin Fluktuationen in Teilgittern Zusätzliche Linien im Diffraktions- spektrum
Unendliche Kern- materie	$\langle \psi \rangle = \langle \sigma_i \tau_j \rangle$ Wellenfunk- tion des Pionen- kondensates	$\emptyset$ nicht physika- lisch	$\chi = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial \emptyset}$	Spin-Isospin Fluktuationen Kritische Streuung Erzeugung von "Pionen"

2.4 Pionenkondensation - Phasenübergang der Kernmaterie

"Pionenkondensation" ist eine kontinuierliche Umwandlung. Es bedarf keiner Wärmezufuhr oder -abgabe, das Volumen der Kernmaterie ändert sich nicht sprunghaft. Die Änderung besteht in einer neuen Anordnung der Nukleonen in der Kernmaterie. Pionenkondensation tritt bei einer bestimmten Dichte ρ_c auf und wird bei einer Temperatur T_c wieder aufgehoben. Das Phasendiagramm in der ρ - T Ebene ist in Fig. 2.19 gegeben. (ρ_0 - normale Dichte der Kernmaterie).

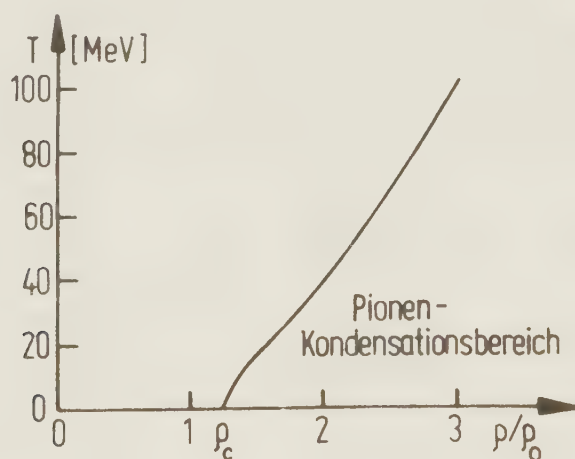


Fig. 2.19: Temperatur-Dichte Zustandsdiagramm der Pionenkondensation in Kernmaterie. (Nach Ruck⁷)

Der Ordnungsparameter ist das "Pionenfeld" oder die Wellenfunktion des Pionenkondensats $\langle \psi \rangle$. Diese Grösse ist unterhalb des kritischen Punktes verschieden von Null und oberhalb des kritischen Punktes Null. "Pionenkondensation" bedeutet, dass ab

einer bestimmten Dichte ρ_c die kollektive (Nukleonen Teilchen - Nukleonen Loch) Anregung "weich" wird und ohne Energieaufwand angeregt werden kann. Diese Teilchen- und Loch (Fermionen) Anregungen koppeln zu den Quantenzahlen eines Bosons - nämlich denen des Pions. Da die Anregung "weich" ist, werden beliebig viele solcher kollektiven "Pionen" in demselben Zustand angeregt. Ein solches "Pion" verbringt die meiste Zeit in der Form von kollektiven Nukleonen Teilchen-Loch Anregungen. Es wird also eine langreichweitige Korrelation aufgebaut, die das System "ordnet". Diese "Ordnung" ist eine Spin-Isospin Anordnung, oder besser ein Spin-Isospin Gitter $n \uparrow p \downarrow n \downarrow p \uparrow n \uparrow p \downarrow \dots$ (Analogie zur Spin-Struktur bei antiferromagnetischen Substanzen). Mit zunehmender Temperatur wachsen die thermischen Störungen, und es bilden sich Spin-Isospin Wellen (periodische Abweichungen von der Spin-Isospin Struktur), die mehr und mehr die "Ordnung" zerstören, bis diese bei der kritischen Temperatur völlig zusammenbricht.

Im kritischen Punkt entstehen starke spontane Spin-Isospin Fluktuationen, die zu erhöhter Nukleonen Streuung und vergrößertem Streuquerschnitt führen sollten. In Ref. 76, 77 und 78 wurden die Energien verschiedener Nukleonen - Gitter berechnet. Die Ergebnisse zeigen, dass die niedrigste Energie, also die günstigste Gitter - Konfiguration dann auftritt, wenn immer die Spins der Nachbar - Teilchen symmetrisch angeordnet sind. Das bedeutet, dass in demselben Kubus Teilchen auf benachbarten Gitterplätzen anti-parallele Spins besitzen (siehe Fig. 2.20

für (sc), Fig. 2.21 für (fcc) und Fig. 2.22 für (bcc) Gitterstrukturen).

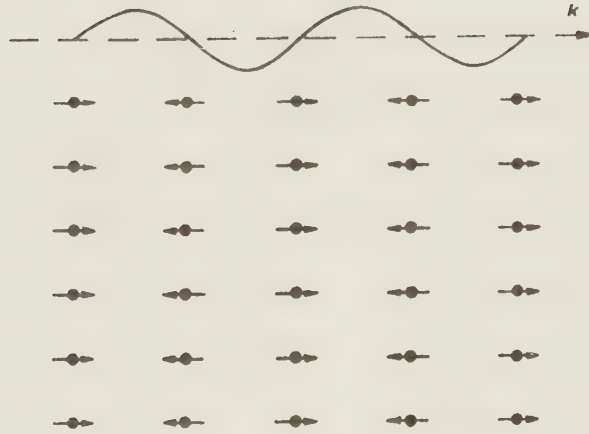


Fig. 2.20: Einfache kubische (sc) Spin-Isospin Gitterstruktur.
(Nach Irvine⁴⁷)

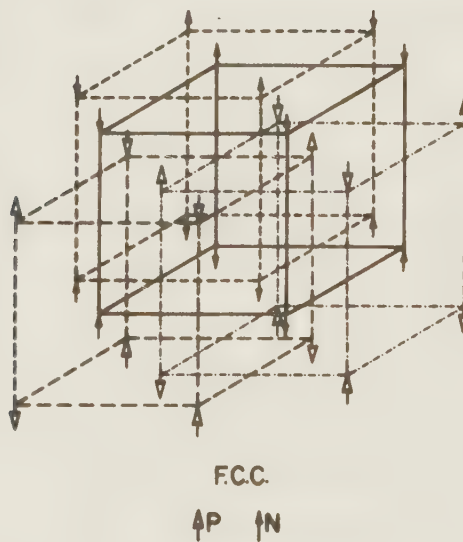


Fig. 2.21: Kubische flächenzentrierte (fcc) Gitterstruktur für
gleiche Protonen P und Neutronen Zahl.
(Nach Canuto und Chitre⁷⁸)

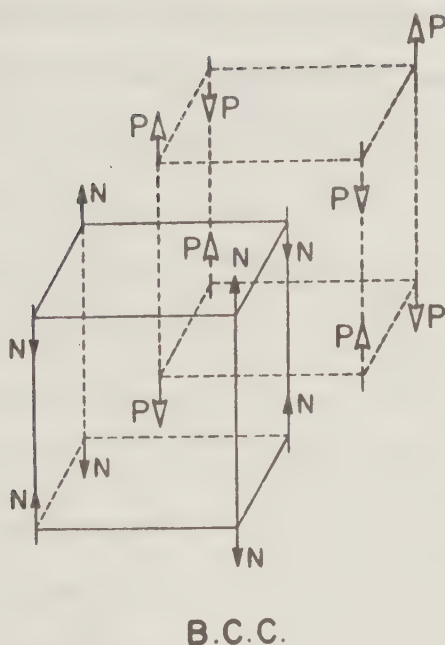


Fig. 2.22: Kubisch raumzentrierte (bcc) Gitterstruktur für gleiche Protonen- und Neutronenzahl. (Nach Ref. 78)

Folglich besteht eine Analogie zu antiferromagnetischen Substanzen, und es sind kritische Spin-Isospin Fluktuationen des inneren Ordnungsparameters $\langle \sigma_i \tau_j \rangle$ zu erwarten. Im Kondensationspunkt könnte die Spin-Isospin Welle die Kernmaterie genügend ordnen, so dass das System kristallisiert. Dies könnte z.B. in Neutronensternen zum Auftreten von fester Kernmaterie führen.^{76, 77, 78} Extrapoliert auf endliche Systeme (Kerne) kann, falls die benötigte Dichte und Temperatur für Pionenkondensation erreicht sind (z.B. bei Schwerionenstößen),

die kritische Streuung zur Verringerung der longitudinalen Impuls-Zerfallslänge und dadurch zur Verbesserung der Hydrodynamik führen, die das Auftreten von Schock-Wellen in Schwerionestößen vorhersagt. 7, 79, 80

3. Die Pion-Nukleon Wechselwirkungen in unendlicher Kernmaterie

In diesem Kapitel untersuchen wir die wichtigsten Terme der Wechselwirkung der Pionen mit Nukleonen und eventuell auftretenden Nukleonen-Resonanzen (Isobare). In den darauffolgenden Kapiteln wird dann die Möglichkeit des Auftretens von Pionen-kondensaten in Kernmaterie auf Grund dieser Wechselwirkungen untersucht. Die Selbstwechselwirkung der Pionen wird nicht berücksichtigt. Sie muss zusätzlich für Systeme berücksichtigt werden mit schon vorhandenem Pionen-kondensat, deren Stabilität und Eigenschaften untersucht werden sollen.

3.1 Die Lagrange-funktion der Wechselwirkung

Die Modell Lagrange-Dichte für Pion-Nukleon Wechselwirkung ist im Ortsraum^{19, 24, 40}

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\bar{\Psi} \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + M \right) \Psi + \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \vec{\Phi} \right)^2 + \\ & + m^2 \vec{\Phi}^2 - f \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_{\mu} \vec{\tau} \Psi \right) \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \vec{\Phi} - \\ & - g \left(\bar{\Psi} \gamma_{\mu} \vec{\tau} \Psi \right) \left(\vec{\Phi} \times \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \vec{\Phi} \right) - \\ & - i h \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \vec{\Phi} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ψ ist ein vierkomponentiger Dirac Spinor, der das Nukleonenfeld beschreibt. $\vec{\Phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ beschreibt das Pionenfeld, $\vec{\tau}$ ist der Isospinvektor, M die Nukleonenmasse, m die Pionenmasse, und Ψ_μ beschreibt das Δ_{33} - Resonanzfeld. Die γ_μ 's sind die γ -Matrizen $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ und $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_4$. Die Konstanten f , g , h sind die Kopplungskonstanten der verschiedenen Wechselwirkungen.

Diese Lagrangedichte ist nicht renormierbar. Im von uns betrachteten nichtrelativistischen Grenzfall, wo keine Divergenzen auftreten, spielt diese Eigenschaft jedoch keine Rolle.

Die Lagrangefunktion besteht aus einem freien Term $\mathcal{L}_0$ plus einem Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_I$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (3.2)$$

$\mathcal{L}_0$ enthält den freien Term für die Nukleonen und die Pionen.

$\mathcal{L}_I$ enthält die Wechselwirkung der Pionen mit den Nukleonen und Nukleonen-Resonanzen (Isobaren).

Die Wechselwirkung der Pionen mit Nukleonen ist durch die Pseudovektorkopplung $i f (\bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_\mu \vec{\tau} \Psi) \partial_\mu \vec{\Phi}$ und durch die Vektorkopplung $g (\bar{\Psi} \gamma_\mu \tau \Psi) (\vec{\Phi} \cdot \partial_\mu \vec{\Phi})$ gegeben. Die Pseudovektorkopplung wurde der ihr äquivalenten Pseudoskalarkopplung $f' (\bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi) \vec{\Phi}$ vorgezogen, da sie, im Gegensatz zur Pseudoskalarkopplung, einen nicht verschwindenden Anteil im nichtrelativistischen Grenzfall besitzt.

Die Wechselwirkung der Pionen mit Isobaren wird durch den Term $i\hbar \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\epsilon} \Psi \partial_\mu \vec{\Phi}$ berücksichtigt.

Die nichtrelativistischen Grenzwerte der einzelnen Terme lauten:

a) Die Pseudovektorkopplung:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{pv} &= -f (\bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_\mu \vec{\epsilon} \Psi) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \vec{\Phi} = \\
 &= -f \Psi^\dagger \gamma_4 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_\mu \vec{\epsilon} \Psi \frac{\partial}{\partial x_\mu} \vec{\Phi} = \\
 &= f \Psi^\dagger \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_\mu \vec{\epsilon} \Psi \frac{\partial}{\partial x_\mu} \vec{\Phi} = \\
 &= \begin{cases} -i f \Psi^\dagger \sigma_\mu \vec{\epsilon} \Psi \frac{\partial}{\partial x_\mu} \vec{\Phi} \sim 1 & \text{für } \mu \neq 4 \\ f \Psi^\dagger \gamma_5 \vec{\epsilon} \Psi \frac{\partial}{\partial x_\mu} \vec{\Phi} \sim v \cdot \sigma \ll 1 & \text{für } \mu = 4 \end{cases} \quad (c=1)
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Da der Term, der die Zeitableitung des Pionenfeldes enthält, sehr klein ist, kann man ihn vernachlässigen, wonach:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{N.R.}^{pv} &= -i f \Psi^\dagger \vec{\sigma} \vec{\epsilon} \Psi \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{\Phi} = \\
 &= -i f \rho(r) \vec{\sigma} \vec{\nabla} \vec{\epsilon} \vec{\Phi} = \\
 &= i f \rho(r) (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \vec{\epsilon} \vec{\Phi}
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

In unseren Rechnungen wurden die folgenden Beziehungen verwendet:

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_4, \quad \gamma_4 \gamma_4 = 1, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu,$$

$\gamma_4 \gamma_i = \tau_i$ und $i \gamma_k \gamma_l = \sigma_m$ (wobei k, l, m zyklisch sind).

b) Die Vektorkopplung:

$$\mathcal{L}^v = -g (\bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \psi) (\vec{\Phi} \times \frac{\partial}{\partial x_\mu} \vec{\Phi}) \quad (3.5)$$

Im Falle geladener Pionen ($\phi_3 = 0$) hat das Kreuzprodukt die Form

$$\vec{\Phi} \times \frac{\partial}{\partial x_\mu} \vec{\Phi} = \vec{e}_3 (\phi_1 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi_2 - \phi_2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi_1) \quad (3.6)$$

Die Lagrangedichte vereinfacht sich zu:

$$\mathcal{L}^v = -g \bar{\psi} \gamma_\mu \tau_3 \psi (\phi_1 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi_2 - \phi_2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi_1)$$

Unter Verwendung der Beziehung $\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \vec{\gamma} \vec{\nabla} + \gamma_4 \frac{\partial}{\partial t}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^v = & -g \bar{\psi} \vec{\gamma} \tau_3 \psi (\phi_1 \vec{\nabla} \phi_2 - \phi_2 \vec{\nabla} \phi_1) - \\ & -g \bar{\psi} \gamma_4 \tau_3 \psi (\phi_1 \partial_t \phi_2 - \phi_2 \partial_t \phi_1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Den Isospin Anteil kann man explizit ausrechnen, indem man das Nukleon-Isodoublet einführt:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \tau_3 \psi &= \overbrace{p^* \quad n^*} \bar{u} e^{i p_\mu x_\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} u e^{-i p_\mu x_\mu} = \\ &= \bar{u} u (p^* p - n^* n) = \bar{\psi}_p \psi_p - \bar{\psi}_n \psi_n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^v = & g(\bar{\psi}_n \vec{\gamma} \psi_n - \bar{\psi}_p \vec{\gamma} \psi_p)(\phi_1 \vec{\nabla} \phi_2 - \phi_2 \vec{\nabla} \phi_1) + \\ & + g(\bar{\psi}_n \gamma_4 \psi_n - \bar{\psi}_p \gamma_4 \psi_p)(\phi_1 \dot{\phi}_2 - \phi_2 \dot{\phi}_1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Der nichtrelativistische Grenzwert des Terms $\bar{\psi} \vec{\gamma} \psi \simeq \psi^\dagger \gamma_4 \gamma_i \psi \sim v_i$ und ist somit vernachlässigbar. Dagegen ist der Term

$$\bar{\psi} \gamma_4 \psi = \psi^\dagger \gamma_4 \gamma_4 \psi = \psi^\dagger \psi = \rho(r) \quad (3.10)$$

gleich der Nukleonendichte.

Definiert man $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ und $\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$

dann gilt:

$$\phi_1 \frac{\partial}{\partial t} \phi_2 - \phi_2 \frac{\partial}{\partial t} \phi_1 = -i(\phi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \phi - (\frac{\partial}{\partial t} \phi^\dagger) \phi)$$

Der nichtrelativistische Grenzwert der Lagrangefunktion ist:

$$\mathcal{L}_{N.R.}^v = -ig(\rho_n - \rho_p)(\phi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \phi^\dagger \phi) \quad (3.11)$$

wobei ρ_n, ρ_p die Dichte der Neutronen bzw. Protonen ist.

Die Pion-Selbstwechselwirkungsterme $(g\phi^3, \lambda\phi^4)$, die für Rechnungen mit vorhandenem Pionenkondensat berücksichtigt

werden,^{9-11, 13, 17} sind in unseren Betrachtungen zur Entstehung des Pionenkondensats nicht diskutiert worden.

Die Struktur der Lagrangefunktion bestimmt die Dispersionsbeziehung, die aus dem Pionenpropagator folgt, in dem Sinne, dass sie zeigt, welche Wechselwirkungen man berücksichtigen muss und welche Diagramme überhaupt auftreten.

Bemerkung:

Ein Modell eines Phasenübergangs in Kernmaterie, das zu einem von Null verschiedenen Erwartungswert des Feldes führt, ähnlich der Pionenkondensation, wurde von Lee und Wick entwickelt^{81, 82}. Im Unterschied zu den in dieser Arbeit verwendeten physikalischen pseudoskalaren Pionenfeldern ($I=1, \gamma^P=0^-$) ist das Modell von Lee und Wick für ein skalares Feld ϕ ($I=1, \gamma^P=0^+$) aufgebaut. Die Stabilität dieses Modells wird untersucht, indem man Selbstwechselwirkungsterme in Betracht zieht.

Die Lagrangedichte ist⁸¹:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

mit

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right)^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 - \psi^\dagger \gamma_4 \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_N \right) \psi \quad (3.12)$$

und

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{3} b \phi^3 + \frac{1}{4} c \phi^4 - g \psi^\dagger \gamma_4 \psi \phi + \dots$$

m_ϕ ist die Masse des Feldes $\phi(x)$, m_N die Nukleonenmasse, und g, b, c sind Kopplungskonstanten. Die Selbstwechselwirkungsterme ϕ^3 und ϕ^4 ermöglichen die Untersuchung der Stabilität der anomalen Kernmaterie. Ab einer genügend hohen Dichte ist der Erwartungswert des ϕ Feldes verschieden von Null $\langle \phi \rangle \neq 0$ (Symmetriebrechung = Kondensat). Die effektive Masse der Nukleonen in einem schweren Kern wird Null (oder sehr klein). Das System zeigt Metastabilität für eine genügend grosse ϕ^3 Kopplung.

Das Lee-Wick Modell ist von akademischem Interesse, weil die physikalische Grundlage dieses Modells nicht bestätigt ist. Es ist nicht gelungen, experimentell skalare Mesonen ($I(J^P) = 0(0^+)$) die eine wesentliche Rolle in den Kernkräften spielen sollten, festzustellen.

3.2 Kernmaterie mit endlicher Temperatur

Die Lagrangedichte der hochangeregten Kernmaterie hat dieselbe Form (3.1) wie die bei der Temperatur $T = 0$. Der Typ der Wechselwirkung ändert sich nicht. Die makroskopischen Eigenschaften verändern sich aber durch:

- a) Thermische Anregung von Nukleonen-Resonanzen, wodurch sich die Zahl der Protonen und Neutronen ändert.
- b) Die Besetzungszahl der Energie-Niveaus ändert sich; man findet mehr Teilchen in höheren Niveaus (Aufrauung der Fermikante).

Dieser Energie- und Teilchenaustausch wird durch die gross-kanonische Zustandssumme

$$Z = \sum_{n,N} e^{-(E_{nN} - \mu N)/T} \quad (3.13)$$

beschrieben. T ist die Temperatur der Kernmaterie, μ das chemische Potential, N die Zahl der Teilchen des Subsystems, die sich in einem Quanten-Zustand, der durch den Eigenwert E_{nN} charakterisiert wird, befinden. Der Mittelwert eines Operators $\hat{O}$ wird durch

$$\langle \hat{O} \rangle = Sp \left(e^{(\Omega + \mu N - H)/T} \hat{O} \right) \quad (3.14)$$

gegeben, wobei Ω das thermodynamische Potential ist: $\Omega = -T \ln Z$. Spur (Sp) bedeutet die Summation über die Teilchenzahl und über alle möglichen Zustände des Systems mit fester Teilchenzahl.

4. Der Pionen Propagator in unendlicher Kernmaterie

In diesem Kapitel berechnen wir den Pionen Propagator in unendlich ausgedehnter Kernmaterie für endliche Temperaturen $\Delta_{\pi}(k, \omega, T)$.

Im Impulsraum lautet der freie Pionen Propagator (im Vakuum):

$$\Delta_{\pi}(k, \omega) = \frac{1}{\omega^2 - k^2 - m_{\pi}^2} \quad (4.1)$$

entsprechend der Energie-Impulsbeziehung $\omega^2 - k^2 = m_{\pi}^2$; ω, k sind die Energie bzw. der Impuls der Pionen, und m_{π} ist die Pionenmasse.

In der Kernmaterie wechselwirkt das Pion mit den Nukleonen und eventuell auftretenden Nukleonen-Resonanzen, weshalb der Propagator (4.1) durch Einfügen eines Korrekturterms $\Pi(k, \omega)$ geändert wird. Der Pionen Propagator erhält bei $T = 0$ die Form:

$$\Delta_{\pi}(k, \omega) = \frac{1}{\omega^2 - k^2 - m_{\pi}^2 - \Pi(k, \omega)} \quad (4.2a)$$

wobei $\Pi(k, \omega)$ der Polarisationsoperator ist. Dieser kann als eine Korrektur der Pionenmasse angesehen werden:

$$\Delta_{\pi}(k, \omega) = \frac{1}{\omega^2 - k^2 - m_{\pi \text{ eff}}^2} \quad (4.2b)$$

Die effektive Masse des Pions in der Kernmaterie ist somit eine Funktion der Energie und des Impulses.

Die Dispersionsgleichung (Energie-Impulsbeziehung) in der Kernmaterie ist dementsprechend:

$$\omega^2 = k^2 + m_\pi^2 + \Pi(k, \omega) \quad (4.3)$$

Der Polarisationsoperator $\Pi(k, \omega)$ wird durch eine Summe von Teilchen-Loch Graphen dargestellt und enthält alle Korrekturen, die durch die in der Lagrangefunktion (3.1) enthaltenen Wechselwirkungen bewirkt werden. Dies sind die Wechselwirkung der Pionen mit Nukleonen und Nukleonen-Resonanzen und die Korrelation dieser Nukleonen mit den restlichen Nukleonen und Resonanzen in der Kernmaterie.

Bei endlicher Temperatur der Kernmaterie wird der Pionen Propagator in Gl. (4.2) eine Funktion der Temperatur $\Delta_\pi(k, \omega, T)$ und es muss ein neuer temperaturabhängiger Polarisationsoperator $\Pi(k, \omega, T)$ eingeführt werden.

Um die Temperaturabhängigkeit zu berechnen, untersuchen wir zunächst die explizite Struktur von $\Pi(k, \omega, T=0)$, um Aufschluss über $\Pi(k, \omega, T)$ zu erhalten. Anschliessend berechnen wir die temperaturabhängigen Funktionen.

4.1 Entwicklung des Pionen Propagators nach Feynman-Diagrammen

Der Polarisationsoperator $\mathcal{T}(k, \omega, T)$ wird durch eine Reihe von Feynman-Diagrammen, entsprechend den einzelnen Wechselwirkungstermen (3.1), dargestellt.

Jeder Typ von Wechselwirkung wird einzeln analysiert.

a) Der Beitrag der Pion-Nukleon Wechselwirkung durch Vektorkopplung zum Polarisationsoperator:

Der nicht-relativistische Lagrangeterm (3.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N.R}^v &= -ig (\rho_n - \rho_p) (\phi^\dagger \partial_t \phi - \partial_t \phi^\dagger \phi) = \\ &= -g \rho_\pi (\rho_n - \rho_p) \end{aligned} \quad (4.4)$$

mit $\rho_\pi = i (\phi^\dagger \partial_t \phi - \partial_t \phi^\dagger \phi)$ ⁴⁰ führt zur Energieverschiebung eines Pions in der Kernmaterie ⁸⁴

$$\begin{aligned} \Delta E_\pi &= \int d\tau (\rho_n V_n + \rho_p V_p) = \\ &= - \frac{2\pi\hbar^2}{m_\pi} (a_3 \rho_n + \frac{1}{3} (a_3 + 2a_1) \rho_p) = \\ &= - \frac{2\pi\hbar^2}{m_\pi} \left[(2a_3 + a_1) (\rho_n + \rho_p) + (a_3 - a_1) (\rho_n - \rho_p) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei V_n (V_p) das Potential der Pion-Neutron (-Proton) Wechselwirkung ist.

Die experimentellen Werte der Streulängen für Pionen im S-Zustand ($\ell=0$) in den $T = 3/2$ und $T = 1/2$ Isospin Kanälen:

$$2a_3 + a_1 = 0.004 \hbar/m_\pi c \approx 0 \quad (4.6)$$

$$a_3 - a_1 = 0.265 \hbar/m_\pi c = 0.374 \text{ fm}$$

liefern das Ergebnis

$$\Delta E_\pi = 219 (\rho_n - \rho_p) \text{ MeV} . \quad (4.7)$$

Diese Energieverschiebung erhöht die effektive Pionenmasse und verschiebt die kritische Dichte der Kondensation zu höheren Werten.

Den Polarisationsoperator $\Pi_S(k, \omega)$ erhält man aus Gl. (4.4). Man hat⁴⁰

$$\rho_\pi = 2 \mu_\pi \langle \phi \rangle^2 \quad (4.8)$$

und die Quelle des Pionenfeldes ist

$$J = - \frac{\partial \mathcal{L}_{N.R.}^v}{\partial \phi^\dagger} = 2g \mu_\pi \langle \phi \rangle (\rho_n - \rho_p) \quad (4.9)$$

Der Polarisationsoperator $\Pi(k, \omega = \mu_\pi)$ ist durch $J/\langle \phi \rangle$ gegeben⁴⁰:

$$\Pi_S(k, \omega) = 2g \omega (\rho_n - \rho_p) = V_0 \omega (\rho_n - \rho_p) \quad (4.10)$$

wobei die Konstante $V_0 = 1.3$ ist.

Für symmetrische Kernmaterie ($N = Z$) gilt demzufolge $\pi_S(k, \omega) = 0$.

$\pi_S(k, \omega)$ wird durch den Austausch von drei "Teilchen" (Pionen-Cluster) bestimmt^{30, 85, 86};

- i) σ -Meson Austausch [der Austausch zweier Pionen im Iso-spin-Null Zustand $(\pi \pi)_0$]
- ii) ρ -Meson Austausch [der Austausch zweier Pionen im Iso-spin - 1 Zustand $(\pi \pi)_1$]
- iii) "hard core" [der Austausch schwerer Mesonen (z.B. ω Mesonen), die eine kurzreichweitige Abstossung verursachen]

Der σ -Austausch-Term ist anziehend, der "hard-core" abstossend, und beide Werte gleichen sich aus⁸⁰. So trägt nur noch der ρ -Mesonen Austauschterm zu π_S bei.

Die Streulängen für diese drei Vorgänge sind in der Tabelle II zusammengefasst.

	Experimenteller Wert	$\sigma [(\pi\pi)_0]$ Austausch	ρ -Austausch	"hard core"
$a_1(m_{\pi}')$	0.170 ± 0.005	0.22	0.17	-0.29
$a_3(m_{\pi}')$	-0.092 ± 0.002	0.22	-0.09	-0.29

Tabelle II: Die Beiträge verschiedener Austauschterme zu den $\ell = 0$ (S-Zustand) Streulängen a_{2I} ($I =$ Isospin)⁸⁶.

Der Polarisationsoperator $\Pi_S(k, \omega)$ wird also durch ρ -Mesonen-Austausch graphisch folgendermassen dargestellt:

$$\Pi_S(k, \omega) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} = V_0 \omega (\rho_n - \rho_p) \quad (4.11)$$

$\Pi_S(k, \omega)$ hängt von der Dichte der Neutronen und Protonen ab, die sich bei endlicher Temperatur $T \neq 0$ nur durch Isobaren - Produktion ändern kann. Diese ist bei nicht zu hohen Temperaturen klein, und die Form von Π_S (Gl. 4.10) kann im folgenden ohne wesentliche Modifikationen für endliche Temperaturen beibehalten werden.

b) Der Beitrag des Resonanzterms zum Polarisationsoperator:

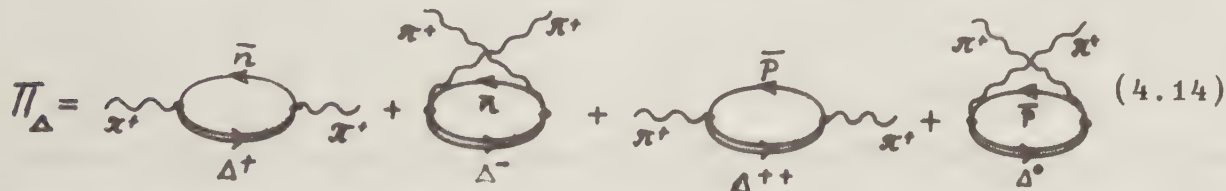
Die Kopplung der Pionen an Nukleonen und Δ_{33} -Resonanzen kann graphisch folgendermassen dargestellt werden¹⁹:

$$\Pi_{\Delta} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \quad (4.12)$$

Die Wellenlinien entsprechen Pionen, einfache Linien Nukleonen und Doppellinien Resonanzen. Der schraffierte ("dressed") Vertex beschreibt die $\pi N \Delta_{33}$ Wechselwirkung in der Kernmaterie. Dies bedeutet, dass der Vakuum-Vertex durch die Summe nicht - reduzierbarer Vertex-Anteile ersetzt wird, z.B.:

$$\text{diagram 1} = \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots \quad (4.13)$$

Die Streuung der Pionen an Nukleonen in der Nähe der Δ_{33} Resonanz zeigt aber, dass sie bis auf 10-30% unabhängig von Einzelheiten - wie die Entstehung und Fortbewegung der Δ 's in der Kernmaterie⁸⁷ - sind. Aus diesem Grunde kann man Vakuum - Vertizes, ohne grosse Fehler zu begehen, verwenden²⁵:



$$\Pi_{\Delta} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \quad (4.14)$$

Den Polarisationsoperator kann man aus dem folgenden Modell⁸⁷ für die Streuung von Pionen an Kernen in der Nähe der Δ_{33} Resonanz abschätzen. Man beschreibt den Kern als eine Scheibe, mit konstanter Dichte ρ , die nicht-wechselwirkende Nukleonen enthält. Das Pion durchquert diese Scheibe strahlenoptisch (gradlinig) ohne jegliche Reflektion an der Oberfläche. Das optische System ist durch den Brechungsindex $n(E)$ oder den Impuls des Pions $k(E)$ im Kern (Funktionen der kinetischen Energie E des Pions) vollständig beschrieben. Die Dispersionsbeziehung im Vakuum

$$\omega^2 = k^2 + m_{\pi}^2 \quad (4.15)$$

(k, m_{π} der Impuls bzw. die Masse des Pions im Vakuum) wird bei der Streuung des Pions am Kern abgeändert zu:

$$\omega^2 = k^2 + m_{\pi}^2 - 4\pi\rho f^{\pi N}(k, E) \quad (4.16)$$

wobei $f^{\pi N}$ die Pion-Nukleon Streuamplitude in Vorwärtsrichtung, im Labor-System, ist. Der Term $4\pi\rho f^{\pi N}$ berücksichtigt die Streuung des Pions an den Nukleonen des Kerns und hat die Form^{87, 88}

$$f^{\pi N}(k, E) = \frac{k^2 C(k)}{\omega_R - \omega - \frac{i}{2} \Gamma} \quad (4.17)$$

wobei ω_R die Energie der Δ_{33} Resonanz, $C(k)$ eine von k schwach abhängige Grösse und Γ die Zerfallsbreite der Resonanz ist. Durch Vergleich von Gl. (4.16) mit der Dispersionsgleichung (4.3) identifizieren wir den Polarisationsoperator zu:

$$\Pi(k, \omega) = -4\pi\rho f^{\pi N} \quad (4.18)$$

$f^{\pi N}$ kann in dem Bereich $\omega < 1$, $k \sim 1$ als Summe der Graphen¹⁹

$$f^{\pi N} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = F_P + F_R \quad (4.19)$$

geschrieben werden, wobei der erste Term den Isospin $T = 1/2$ Kanal und der zweite den $T = 3/2$ Kanal beschreibt. Diese beiden Teile werden getrennt behandelt, um so mehr als F_P dem Pauli-Prinzip stark unterworfen ist, F_R jedoch nicht. Der Fall des Isospin $T = 1/2$ wird in Π_P , im nächsten Abschnitt, behandelt. Zwischen den Parametern F_R und $f^{\pi N}$ besteht eine Differenz von nur 5 - 10%¹⁹, die vernachlässigt wird, d.h. $f^{\pi N} \approx F_R$. Der Beitrag der Δ_{33} -Nukleonen-Resonanz zum Polarisations-

operator ist damit

$$\pi_{\Delta}(k, \omega) = -4\pi \rho F_R \quad (4.20)$$

Die Graphen, die zu F_R beitragen, sind:

$$F_R = \begin{array}{c} \pi^+ \quad \pi^+ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Delta^+ \\ \diagdown \quad \diagup \\ n \quad n \end{array} + \begin{array}{c} \pi^+ \quad \pi^+ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Delta^- \\ \diagdown \quad \diagup \\ n \quad n \end{array} + \begin{array}{c} \pi^+ \quad \pi^+ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Delta^{++} \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad p \end{array} + \begin{array}{c} \pi^+ \quad \pi^+ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Delta^0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad p \end{array} \quad (4.21)$$

Die Kreuz-Graphen stehen dabei in Beziehung zu den direkten Graphen. Der zweite Term ist z.B. äquivalent dem Graph:

$$\begin{array}{c} \pi^+ \quad \pi^+ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Delta^- \\ \diagdown \quad \diagup \\ n \quad n \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \pi^- \quad \pi^- \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Delta^- \\ \diagdown \quad \diagup \\ n \quad n \end{array} \quad (4.22)$$

und

$$F_R^+(k, \omega) = F_R^-(-k, -\omega) \quad (4.23)$$

Da

$$|\pi^- n\rangle = 1 \mid 3/2, -3/2\rangle \quad (4.24)$$

und

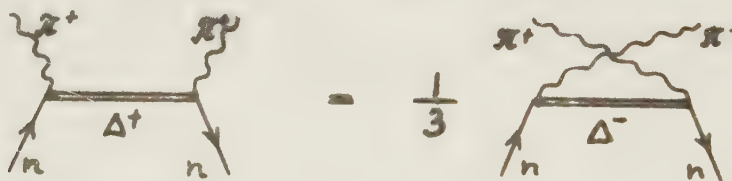
$$|\pi^+ n\rangle = 1/\sqrt{3} |3/2, 1/2\rangle \left(+\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \begin{smallmatrix} 1/2 & 1/2 \end{smallmatrix} \right\rangle \right)_{T=1/2}$$

erhalten die Streuamplituden im Isospin $T = 3/2$ Kanal folgende Werte:

$$F_R^{\pi^- n} \sim \langle \pi^- n | a | \pi^- n \rangle = 1 a_{T=3/2} \quad (4.25)$$

$$F_R^{\pi^+ n} \sim \langle \pi^+ n | a | \pi^+ n \rangle = 1/3 a_{T=3/2}$$

Daraus folgt, dass der direkte Graph und der Kreuz-Graph in einem Verhältnis 1/3 stehen, also



$$= \frac{1}{3} \quad (4.26)$$

Nach analogen Rechnungen für den dritten und vierten Term der Gl. (4.21) folgt:

$$\begin{aligned} \Pi_{\Delta}(k, \omega) = & 4\pi a(k) k^2 \left[\left(\frac{1}{\omega_R - \omega} + \frac{3}{\omega_R - (-\omega)} \right) \rho_n + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\omega_R + \omega} + \frac{3}{\omega_R - \omega} \right) \rho_p \right] \quad (4.27) \end{aligned}$$

mit $a(k) = 0.08 / (1 - 0.23 k^2)^{19}$ und $\omega_R = 2.4$.

Der Polarisationsoperator $\Pi_{\Delta}(k, \omega)$ hängt von der Dichte der Protonen und Nukleonen ab. Die Temperaturabhängigkeit von

$\Pi_{\Delta}(k, \omega, T)$ kann also nur durch die Temperaturabhängigkeit der Dichten ρ_n, ρ_p herbeigeführt werden. Diese nehmen wiederum nur geringfügig durch Δ_{33} Isobaren-Produktion, bei zunehmender Temperatur, ab. Näherungsweise lässt sich dies durch die folgende Gleichung ausdrücken:

$$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_N} \sim 4 \cdot e^{-\Delta m / T} \lesssim 0.2 \quad (4.28)$$

für $T < 100$ MeV. Dies würde den Beitrag von $\Pi_{\Delta}(k, \omega, T)$ zum Polarisationsoperator verringern; jedoch nimmt auf der anderen Seite die Wechselwirkung der Isobaren mit Isobaren

$$\Pi_{\Delta\Delta}(k, \omega, T) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad (4.29)$$

zu, was den Beitrag von Π_{Δ} zum Polarisationsoperator geringfügig erhöht.

Diese beiden Vorgänge, die bei endlichen Temperaturen stattfinden und sich mindestens teilweise aufheben, ermöglichen es, den Ausdruck Gl. (4.27) weiterhin, in guter Näherung, für $\Pi_{\Delta}(k, \omega, T)$ zu benutzen.

c) Der Beitrag der Pion-Nukleon Wechselwirkung durch

Pseudovektor-Kopplung zum Pionen-Polarisationsoperator:

Der Term $-i f \psi^\dagger \vec{\sigma} \vec{\tau} \psi \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{\phi}$ der Lagrangefunktion (Gl. 3.4) liefert die Wechselwirkung der Pionen mit den Nukleonen über eine Teilchen-Loch Anregung. Der wesentliche Beitrag zu Π_p ist¹⁹:

$$\Pi_p(k, \omega) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad (4.30)$$

Die Graphen werden einzeln berechnet.

$$\Pi_p^1(k, \omega) = \text{Diagram 3} \quad (4.31)$$

ist ein Integral über die Nukleonenpropagatoren:

$$\begin{aligned} \Pi_p^1(k, \omega) &= \\ &= -i (\mathcal{T}_0^+)^2 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(\vec{p}, \varepsilon) G(\vec{p} + \vec{k}, \varepsilon + \omega) = \\ &= -i (\mathcal{T}_0^+)^2 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int G(\vec{p}, \varepsilon) G(\vec{p} + \vec{k}, \varepsilon + \omega) \frac{d\varepsilon}{2\pi} = \\ &= (\mathcal{T}_0^+)^2 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n^2(\vec{p})}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \end{aligned} \quad (4.32)$$

wobei $\mathcal{T}_0^+ = \sqrt{2} \ i f \tau_+ k \sigma_2$ der Vertex der πN Wechselwirkung (Gl. 3.4) für π^+ Pionen ist $(\mathcal{T}_0^+)^2 = 2 f^2 k^2$;

$G(\vec{p}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon(\vec{p}) - \mu + i\delta \operatorname{sign}(|\vec{p}| - p_F)}$ ist die Greens-Funktion für Nukleonen, $n^i(p)$ ist die Besetzungszahl der Nukleonen ($i = n \rightarrow$ Neutronen; $i = p \rightarrow$ Protonen), $n(p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p < p_F \\ 0 & \text{wenn } p > p_F \end{cases}$ mit p_F als Fermi-Impuls und $\varepsilon(\vec{p}) = p^2/2m^*$ ist die Energie des Nukleons. Der Faktor 2 im Polarisationsoperator berücksichtigt die Entartung des Spins. Die Rechnungen ergeben (siehe Anhang 3a, Gl. (A₃.3))

$$\Pi_p(k, \omega) = 4 f^2 k^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n^n(\vec{p}) - n^p(\vec{p} + \vec{k})}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \quad (4.33)$$

Mit der Abkürzung (die bekannte Lindhard Funktion⁶⁸⁾)

$$\Phi(k, \omega) = \frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n^p(\vec{p} + \vec{k}) - n^n(\vec{p})}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \quad (4.34)$$

wobei $p_F^n = p_F^p = p_F$ für den Fall $N = Z$ steht, lässt sich Gl. (4.33) einfach schreiben¹⁹

$$\Pi(k, \omega) = -4 f^2 k^2 \frac{m^* p_F}{2\pi^2} \Phi(k, \omega) \quad (4.35)$$

wobei $m^* = 0.9m$ die effektive Masse der Nukleonen ist, die man für die Berücksichtigung der Effekte von Graphen höherer Ordnung, wie z.B.



(4.36)

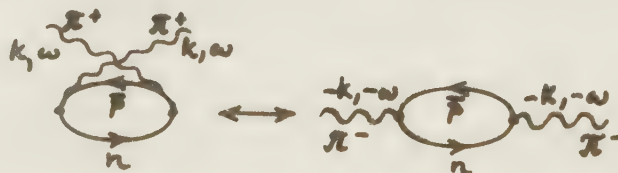
benutzt.

Die Lindhard-Funktion $\phi(k, \omega)$ kann man analytisch integrieren (Anhang 3a) und erhält z.B. für den direkten Graphen ($A_3.9$)

$$\begin{aligned} \phi_1(k, \omega) &= \\ &= \frac{2\pi^2}{m^* p_F^n} \int \frac{-n^n(\vec{p})}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \\ &= \frac{m^*}{2 p_F^n k^3} \left(\frac{a^2 - b^2}{2} \ln \frac{a+b}{a-b} - ab \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

mit $a = \omega - k^2/2m^*$ und $b = p_F^n k / m^*$.

Da die Graphen



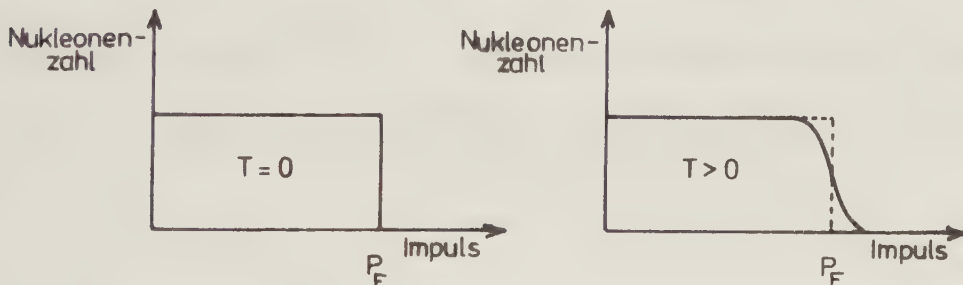
(4.38)

äquivalent sind, kann man mit

$$\phi(k, \omega) = \phi_1(k, \omega) + \phi_1(-k, -\omega) \quad (4.39)$$

den Polarisationsoperator $\overline{\Pi}_p(k, \omega)$ Gl. (4.30) analytisch berechnen⁸⁹.

Aus den Rechnungen für $T = 0$ geht hervor, dass $\overline{\Pi}_p(k, \omega)$ stark vom Impuls der Nukleonen abhängt. Will man die Rechnungen für endliche Temperaturen ausführen, muss man dabei berücksichtigen, dass die Impulsverteilung eine Funktion der Temperatur ist. Durch die Temperatur wird die Fermikante aufgeraut (Fermiverteilung).



In $\overline{\Pi}_p(k, \omega, T \neq 0)$ muss man also eine impulsabhängige Verteilungsfunktion der Nukleonen

$$n(\vec{p}, T) = \frac{1}{e^{(\vec{p}^2/2m - \mu)/T} + 1} \quad (4.40)$$

einführen.

Zur Auswertung der temperaturabhängigen Graphen in $\overline{\Pi}_p(k, \omega, T)$ benötigt man die einzelnen temperaturabhängigen Greens-Funktionen im Impulsraum (siehe Anhang 1). $\overline{\Pi}_p(k, \omega, T)$ wird graphisch

ähnlich wie Gl. (4.30) dargestellt:

$$\Pi_p(k, \omega, T) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad (4.41)$$

Diagram 1: A loop with two vertices. The left vertex is connected to a wavy line labeled π^+ . The right vertex is connected to a wavy line labeled π^+ . The top arc of the loop is labeled $\bar{n}$ with an arrow pointing right. The bottom arc is labeled p with an arrow pointing left.

Diagram 2: A loop with two vertices. The top vertex is connected to two wavy lines labeled π^+ . The bottom vertex is connected to a wavy line labeled n . The top arc of the loop is labeled $\bar{p}$ with an arrow pointing right. The bottom arc is labeled n with an arrow pointing left.

wobei jetzt die Linien temperaturabhängige Greens-Funktionen bedeuten.

Berechnet man zum Beispiel den direkten Term aus Gl. (4.41)

$$\text{Diagram 3} \quad (4.42)$$

Diagram 3: A loop with two vertices. The left vertex is connected to a wavy line labeled π^+ with momentum k, ω_m . The right vertex is connected to a wavy line labeled π^+ with momentum k, ω_m . The top arc of the loop is labeled $p+k, \varepsilon_n + \omega_m$ with an arrow pointing right. The bottom arc is labeled p, ε_n with an arrow pointing left.

und verwendet die Feynman Regeln für $T = 0^{90}$ (siehe Anhang 2), erhält man (für den Selbstenergie-Term):

$$\begin{aligned} \Pi_p(k, \omega, T) &= \\ &= g^{2n} \frac{T^n}{(2\pi)^{3n}} (-1)^n (2s+1)^F (\bar{\tau})^F \sum_{n,m} \int d\vec{p} \mathcal{G}(\vec{p}, \varepsilon_n) \mathcal{G}(\vec{p}+\vec{k}, \varepsilon_n + \omega_m) \end{aligned} \quad (4.43)$$

mit:

F	Zahl der geschlossenen Fermionen Schleife
s	Spin der Teilchen
$2n$	Zahl der Vertizes ($2n = 2$ in Gl. (4.42))
$\varepsilon_n = (2n+1)\pi T$	(Fermionen)
$\omega_m = 2m\pi T$	(Bosonen)

und

$$\mathcal{G}(\vec{p}, \varepsilon_n) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon(\vec{p}) + \mu} \quad (4.44)$$

$\varepsilon(\vec{p}) = p^2/2m^*$ und μ ist die Fermi-Energie.

In unserem Fall haben wir $S = 1/2$, $F = 1$, $n = 1$.

Der direkte Term ist demzufolge

$$\Pi_p'(k, \omega, T) = 2g^2 T \sum_{n,m} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \mathcal{U}(\vec{p}, \varepsilon_n) \mathcal{U}(\vec{p}+\vec{k}, \varepsilon_n + \omega_m) \quad (4.45)$$

mit $g^2 = 2f^2 k^2$.

Nach der Auswertung der Summe (Anhang 3b) erhält man für Gl. (4.41):

$$\Pi_p(k, \omega, T \neq 0) = 4f^2 k^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n^n(\vec{p}, T) - n^p(\vec{p}+\vec{k}, T)}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p}+\vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \quad (4.46)$$

Wir definieren in Analogie zum Fall $T = 0$ die Funktion

$\phi(k, \omega, p_F, T)$ (Gl. A_{3.14}) ($N = Z$):

$$\phi(k, \omega, p_F, T) = \frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n^p(\vec{p}+\vec{k}, T) - n^n(\vec{p}, T)}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p}+\vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \quad (4.47)$$

$n^n(\vec{p}, T)$ und $n^p(\vec{p}, T)$ sind die Fermi-Verteilungsfunktionen (4.40) für Neutronen bzw. Protonen.

Integriert man $\phi(k, \omega, p_F, T)$, so stellt man fest, dass es keine einfache analytische Lösung gibt. Im Falle des direkten

Graphen (Anhang 3b, Gl. (A₃.17)) ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{aligned}\phi_1(k, \omega, p_F^n, T) &= \\ &= \frac{2\pi^2}{m^* p_F^n} \int \frac{-n^n(\vec{p}, T)}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \\ &= \frac{1}{2p_F^n k} \int_0^\infty p dp \frac{1}{e^{(\varepsilon(\vec{p}) - \mu)/T} + 1} \ln \left(\frac{i\omega_m - k^2/2m^* - pk/m^*}{i\omega_m - k^2/2m^* + pk/m^*} \right)\end{aligned} \quad (4.48)$$

Der Grenzwert $\lim_{T \rightarrow 0} \phi(k, \omega, T) = \phi(k, \omega, T=0)$ (Gl. (A₃.18)), ist erwartungsgemäss identisch mit dem bei $T = 0$ berechneten Wert von $\phi(k, \omega)$, Gl. (A₃.7).

Die Summe aus direktem Graphen und Kreuzgraphen ist:

$$\phi(k, \omega, p_F, T) = \phi_1(k, \omega, p_F^n, T) + \phi_1(-k, -\omega, p_F^p, T) \quad (4.49)$$

$\Pi_p(k, \omega, T)$ erhält die Form:

$$\Pi_p(k, \omega, T) = -4f^2 k^2 \frac{m^* p_F}{2\pi^2} \phi(k, \omega, p_F, T) \quad (4.50)$$

Die Zusammenfassung der Beiträge a), b) und c), d.h. die Summe der Polarisationsoperatoren für die einzelnen Wechselwirkungen in der Lagrangefunktion (3.1), ergibt:

$$\Pi(k, \omega, T) = \Pi_S(k, \omega, T) + \Pi_P(k, \omega, T) + \Pi_\Delta(k, \omega, T) \quad (4.51)$$

Hierbei wird, physikalisch gesehen, der Austausch eines Pions (OPE) berücksichtigt. In Gl. (4.51) sind folgende Graphen enthalten:

$$\begin{aligned} \Pi(k, \omega, T) = & \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} + \text{[Diagram 3]} + \\ & + \text{[Diagram 4]} + \text{[Diagram 5]} + \text{[Diagram 6]} + \text{[Diagram 7]} + \\ & + \text{[Diagram 8]} + \text{[Diagram 9]} + \text{[Diagram 10]} + \text{[Diagram 11]} + \\ & + \text{[Diagram 12]} + \text{[Diagram 13]} + \text{[Diagram 14]} + \text{[Diagram 15]} + \\ & + \text{[Diagram 16]} + \text{[Diagram 17]} + \text{[Diagram 18]} + \text{[Diagram 19]} + \text{[Diagram 20]} + \text{[Diagram 21]} + \text{[Diagram 22]} + \end{aligned} \quad (4.52)$$

Die einzelnen Elemente dieser Graphen haben folgende Bedeutung¹⁰²:



Pionen-Linie



Nukleonen-Teilchen Linie



Nukleonen-Loch Linie

	Nukleonen-Resonanz Teilchen Linie
	Nukleonen-Resonanz Loch Linie
	ρ Meson Austausch

Die einzelnen Graphen sind durch OPE verbunden.

4.2 Die Nukleon-Nukleon Korrelation

In den vorausgegangenen Abschnitten haben wir nur den Austausch eines Pions (OPE) berücksichtigt. Die Nukleonen wechselwirken aber ebenso mit den restlichen Nukleonen der Kernmaterie. Darum muss man auch Graphen höherer Ordnung berücksichtigen, die die Wechselwirkung einzelner Teilchen der Grundgraphen mit der Kernmaterie beschreiben. Formal kann man diese Wechselwirkung folgendermassen darstellen:

$$\Pi_p^{corr}(k, \omega, T) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad (4.53)$$


Diese Korrekturen können mit zwei verschiedenen Methoden ausgewertet werden.

- a) Aufsummierung von Graphen unter Verwendung einer phänomenologischen Konstanten $G(k, \omega)$, die die Teilchen-Loch Wechselwirkung beschreibt.

Der direkte Term ist:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \\
 &= \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

The diagrams represent particle interactions. Diagram 1 is a self-energy loop with a shaded half. Diagram 2 is a bubble loop. Diagram 3 is a bubble loop with a shaded vertex and a wavy line labeled $G(k, \omega)$. Diagram 4 is a bubble loop. Diagram 5 is a bubble loop with two vertices connected by two wavy lines labeled π .

wobei $G(k, \omega)$ alle möglichen Wechselwirkungen zwischen Teilchen und Loch, wie z.B. Austausch eines oder mehrerer Mesonen verschiedener Art ($\pi, \omega, \dots$), enthält.

$G(k, \omega)$ hat dabei die folgende Form³³:

$$G(k, \omega) = 2f^2 \left[\frac{k^2}{\omega^2 - k^2 - m_\pi^2} + \frac{1}{3} + \tilde{g}(k) \right]
 \tag{4.55}$$

wobei der erste Term den OPE, der zweite Term die Ericson - Ericson Korrektur⁹¹ und der letzte Term die restlichen Wechselwirkungen beschreibt.

Nach Ref. 33 ist $\tilde{g}(k) \simeq 0.1$ für $k < 3m_\pi$ und somit

$$g = 1/3 + \tilde{g} \simeq 0.4$$

Dies bedeutet graphisch:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots \\
 &+ \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

The diagrams represent particle interactions. Diagram 1 is a self-energy loop with a shaded half. Diagram 2 is a bubble loop. Diagram 3 is a bubble loop with a shaded vertex. Diagram 4 is a bubble loop with a shaded vertex and a wavy line labeled g . Diagram 5 is a bubble loop with a shaded vertex and a wavy line labeled g . Diagram 6 is a bubble loop with a shaded vertex and a wavy line labeled g .

oder (Dyson Gleichung)

$$\text{Diagram with shaded half} = \text{Diagram with full loop} + g \cdot \text{Diagram with two loops and shaded half} \quad (4.57)$$

und in Propagatorschreibweise

$$\Pi_P^{\text{corr}} = \Pi_P + \Pi_P g/k^2 \Pi_P^{\text{corr}} \quad (4.58a)$$

oder

$$\Pi_P^{\text{corr}} = \frac{\Pi_P}{1 - g \Pi_P / k^2} \quad (4.58b)$$

Bei Hinzunahme der Kreuz-Terme folgt:

$$\begin{aligned} \Pi_P^{\text{corr}} = & \text{wavy line} + \text{wavy line} \cdot \text{loop} \cdot \text{wavy line} + \text{wavy line} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{wavy line} + \dots \\ & + \text{wavy line} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{wavy line} + \text{wavy line} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{wavy line} + \dots \\ & + \text{wavy line} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{wavy line} + \text{wavy line} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{wavy line} + \dots \\ & + \text{wavy line} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} \cdot \text{wavy line} + \dots \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \pi_p^{N-N}(k, \omega, T) &= \text{OPE} + \text{Nukleon - Nukleon Korrelationen} = \\ &= \frac{\pi_p}{1 - g \pi_p / k^2} + \pi_\Delta(k, \omega, T) \end{aligned} \quad (4.60)$$

b) Berechnung der Nukleon-Nukleon Korrelationen unter Verwendung der Vertexfunktion $\mathcal{T}$ aus der Theorie der Fermiflüssigkeit⁹⁰.

Die Korrektur des Graphen  (mit Vakuum Vertex) zu  (mit Vertex, der die Wechselwirkung der Quasi-Teilchen des Graphen mit den restlichen Teilchen der Kernmaterie berücksichtigt) kann man sofort berechnen, indem man eine der Kopplungskonstanten durch die Vertexfunktion $\mathcal{T}(p, p+k; k)$ ersetzt⁹⁰.

Das heisst für den Fall $T = 0$, dass man anstelle von

$$\pi_p(k, \omega) = -2i (\mathcal{J}_0^+)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) G(p+k) \quad (4.61)$$

die Formel

$$\pi_p^{\text{corr}}(k, \omega) = -2i (\mathcal{J}_0^+) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) G(p+k) \mathcal{T}(p, p+k; k) \quad (4.62)$$

verwendet. $\mathcal{J}_0^+ = \sqrt{2} i \tau_+ k \sigma_z$ (Gl. 4.32).

Dabei ist $\mathcal{T}$ in unserem Fall (siehe Anhang 4)

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}_0^+}{1 - 2\Gamma^\omega \int \frac{n^s(\vec{q}) - n^s(\vec{q} + \vec{k})}{\omega - \varepsilon(\vec{q} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{q})} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}}$$

und für $N = Z$

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}_0^+}{1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \phi(k, \omega)} \quad (4.63)$$

mit^{19, 92}

$$\frac{m^* p_F}{\pi^2} \Gamma^\omega = g + g' (\vec{e} \cdot \vec{e}') (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') \simeq g^- \quad (4.64)$$

ϕ aus Gl. (4.34) und Γ^ω ist die Amplitude der Wechselwirkung der Quasi-Teilchen in der Nähe der Fermikante; $g^- = 1.6$ und $p_0 \simeq 2$ (siehe Anhang 2).

Setzt man Gl. (4.63) in Gl. (4.62) ein und beachtet Gl. (4.33) und Gl. (4.34), erhält man

$$\begin{aligned} \Pi_p^{corr}(k, \omega) &= \\ &= -2i \mathcal{T}_0^+ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) G(p+k) \frac{\mathcal{T}_0^+}{1 + g^- \frac{2\pi^2}{m^* p_0} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n(\vec{q}) - n(\vec{q} + \vec{k})}{\omega - \varepsilon(\vec{q} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{q})}} \quad (4.65) \\ &= - \frac{4 f^2 k^2}{1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \phi(k, \omega)} \frac{m^* p_F}{2\pi^2} \phi(k, \omega) \end{aligned}$$

Diese Formel gilt auch für $T > 0$ mit $\phi(k, \omega, T)$ aus Gl. (4.49) anstelle von $\phi(k, \omega)$.

Die allgemeinste Form von π_p^{corr} für ungleiche Protonen- und Neutronenzahl ($N \neq Z$) ist:

$$\pi_p^{corr}(k, \omega, p_F, T) = -4f^2 k^2 \frac{m^*}{2\pi^2} \frac{\rho_F^n \phi_1(k, \omega, \rho_F^n, T) + \rho_F^p \phi_1(-k, -\omega, \rho_F^p, T)}{1 + \frac{g}{\rho_0} (\rho_F^n \phi_1(k, \omega, \rho_F^n, T) + \rho_F^p \phi_1(-k, -\omega, \rho_F^p, T))} \quad (4.66)$$

wobei $\phi_1(k, \omega, \rho_F, T)$ in Gl. (4.48) definiert ist.

Aus Gl. (4.65) und Gl. (4.50) kann man die N-N Korrelation im Falle $N = Z$ ableiten:

$$\pi_p^{corr}(k, \omega, T) = \frac{\pi_p}{1 - G \pi_p / k^2} \quad (4.67)$$

Die Form (4.67) des Polarisationsoperators wird in den Migdalschen Rechnungen¹⁹ verwendet. Für $k=0$ und im Falle symmetrischer Kernmaterie ($N = Z$) ist sie identisch mit dem durch Ref. 33 gegebenen Polarisationsoperator Gl. (4.58b).

Der gesamte Polarisationsoperator ist die Summe der Terme (Gl. 4.66, 4.27, 4.10):

$$\pi(k, \omega, T) = \pi_s(k, \omega, T) + \pi_p^{corr}(k, \omega, T) + \pi_\Delta(k, \omega, T) \quad (4.68)$$

4.3 Die Nukleon-Delta (Δ_{33}) Korrelation

Der Polarisationsoperator $\Pi(k, \omega, T)$ in Gl. (4.68) berücksichtigt neben der Wechselwirkung der Pionen mit den Nukleonen und deren Korrelationen die Wechselwirkung der Pionen mit den Resonanzen. Da die Resonanzen aber auch mit den Nukleonen und zusätzlich mit sich selbst wechselwirken, muss man die Nukleon - Δ_{33} Korrelation ebenfalls berücksichtigen. Für die Nukleon - Δ_{33} Korrelation kann man gekoppelte Kanal Rechnungen in der Art von Brown und Weise²⁵⁻²⁷, Bäckman et al.³³, Ruck⁷ durchführen. Der Pionenpropagator ist hierbei folgendermassen verändert

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_0 \Pi \Delta_0 \quad (4.69a)$$

nämlich

$$\text{wavy line} = \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{shaded circle} \text{---} \text{wavy line} \quad (4.69b)$$

Π

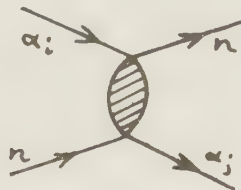
Wir verwenden das Modell aus § 4.1b für die Streuung von Pionen an Kernen in der Nähe der Δ_{33} Resonanz. Die Korrektur ergibt sich aus der Summe der Terme:

$$\begin{aligned} & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots \\ & \text{Diagram 3} + \dots \end{aligned} \quad (4.70)$$

The diagrams represent Feynman-like diagrams for pion-nucleon interactions. Diagram 1 shows a pion (wavy line) interacting with a nucleon (solid line) via a vertex α_i . Diagram 2 shows a pion interacting with a nucleon via a vertex α_i , which then interacts with a shaded circle (representing a resonance) and another nucleon, which in turn interacts with a pion via a vertex α_j . Diagram 3 shows a similar process with two shaded circles and three vertices $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$. The diagrams are summed to give the total correction.

wobei n für Nukleonen und $\alpha_i = \{\text{Nukleon}, \Delta_{33}, N^*, \dots\}$ für die verschiedenen Wechselwirkungs-Kanäle steht.

Wir bezeichnen im folgenden die Streuamplitude mit M_{ij}



$$= M_{ij} \quad (4.71)$$

In M kann man OPE, ω und ρ Austausch in der Form

$$M_{ij} = \sum_K f_{iK} f_{jK} \tilde{\Delta}_K \quad (4.72)$$

berücksichtigen, wobei $\tilde{\Delta}_K$ der Propagator des Teilchens $K(x, \rho, \omega, \dots)$ und f_{iK} die Kopplungskonstanten des Teilchens K mit α_i sind.

Für den Polarisationsoperator folgt daraus

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_i f_{i\pi} K \Delta_i K f_{i\pi} + \\ & + \sum f_{i\pi} K \Delta_i M_{ij} \Delta_j K f_{j\pi} + \\ & + \sum_{ijk} f_{i\pi} K \Delta_i M_{iK} \Delta_K M_{Kj} \Delta_j K f_{j\pi} + \dots \end{aligned} \quad (4.73)$$

wobei K der Impuls des Pions ist. Jeder Vertex trägt einen Faktor K zur Amplitude bei, was wir explizit ausschreiben.

ist der Propagator des Teilchens α_i .

Andererseits kann man die Gl. (4.73) auch in der Form

$$\Pi = K^2 \langle f_{i\pi} | \tilde{\Pi} | f_{i\pi} \rangle \quad (4.74)$$

ausdrücken

mit

$$| f_{i\pi} \rangle = \begin{pmatrix} f_{1\pi} \\ f_{2\pi} \\ \vdots \\ f_{n\pi} \end{pmatrix}, \quad \langle f_{i\pi} | = (f_{1\pi} \ f_{2\pi} \ \cdots \ f_{n\pi})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \Delta + \Delta M \Delta + \Delta M \Delta M \Delta + \cdots = \\ &= \Delta \sum_{n=0}^{\infty} (M \Delta)^n = \Delta (1 - M \Delta)^{-1} = \\ &= (\Delta^{-1} - M)^{-1} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Dabei ist Δ eine Diagonalmatrix $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & 0 \\ & \Delta_2 & \cdots \\ 0 & & \Delta_n \end{pmatrix}$

und M die Matrix mit den Elementen M_{ij} .

Aus der Symmetrie von Δ und M folgt dann die Möglichkeit, $\tilde{\Pi}$ zu diagonalisieren. In dieser Arbeit sind wir an den Singularitäten des Polarisationsoperators interessiert. Da $\tilde{\Pi}$ diagonalisierbar ist und die Form $(\Delta^{-1} - M)^{-1}$ hat, genügt es, diejenigen Eigenwerte von $\Delta^{-1} - M$ zu finden, die identisch Null sind. Ein einfacher Weg ergibt sich durch die Tatsache, dass $\tilde{\Pi}$ das Inverse einer Matrix ist, deren Existenz es

notwendig macht, dass die Determinante verschieden von Null ist (siehe Gl. 4.79), d.h. man erhält Singularitäten, wenn:

$$\det(\Delta^{-1} - M) = 0 \quad (4.76a)$$

woraus folgt:

$$\det(1 - M\Delta) = 0 \quad (4.76b)$$

Dies bedeutet, dass der Polarisationsoperator genau dann Pole hat, wenn Gl. (4.76) erfüllt ist.

Der Polarisationsoperator $\overline{\Pi}_p(k, \omega, T)$ mit der $N - \Delta_{33}$ Kanal - Korrektur wird wie folgt berechnet³³.

Man hat

$$\Delta = \begin{pmatrix} u_N & 0 \\ 0 & u_\Delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} g_{NN} & g_{N\Delta} \\ g_{\Delta N} & g_{\Delta\Delta} \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

Hier wurde $\overline{\Pi}_N$ als $f_N^2 k^2 u_N$ und $\overline{\Pi}_\Delta$ als $f_\Delta^2 k^2 u_\Delta$ ausgedrückt. (Vergleiche mit Gl. (4.50) und Gl. (4.27)). $f_\Delta^2 = 4f_N^2 = 4 \cdot 4\pi \cdot 0.08$ stellt die $\pi N \Delta_{33}$ Kopplungskonstante dar.

Wir berechnen $\tilde{\Pi}$ aus der Gl. (4.75) unter Verwendung der inversen Matrix. Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Mit

$$\det [\Delta^{-1} - M] =$$

$$= \det \left(\frac{\Delta}{1 - M\Delta} \right) = \frac{U_N U_\Delta}{\det(1 - M\Delta)} \quad (4.79)$$

erhalten wir:

$$\frac{\tilde{\Pi}}{\Pi} = \frac{1}{\det(1 - M\Delta)} \begin{bmatrix} U_N - g_{\Delta\Delta} U_N U_\Delta & g_{N\Delta} U_\Delta U_N \\ g_{\Delta N} U_N U_\Delta & U_\Delta - g_{NN} U_N U_\Delta \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

und nach Gl. (4.74)

$$\Pi = \frac{k^2}{\det(1 - M\Delta)} (f_{N\pi} \ f_{\Delta\pi}) \begin{bmatrix} U_N - g_{\Delta\Delta} U_N U_\Delta & g_{N\Delta} U_\Delta U_N \\ g_{\Delta N} U_N U_\Delta & U_\Delta - g_{NN} U_N U_\Delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{N\pi} \\ f_{\Delta\pi} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{k^2}{\det(1 - M\Delta)} \left[f_N^2 U_N (1 - g_{\Delta\Delta} U_\Delta) + \right. \quad (4.81)$$

$$\left. + f_\Delta^2 U_\Delta (1 - g_{NN} U_N) + 2 f_N f_\Delta g_{N\Delta} U_N U_\Delta \right]$$

mit

$$\det(1 - M\Delta) = \begin{vmatrix} 1 - g_{NN} U_N & g_{N\Delta} U_\Delta \\ g_{\Delta N} U_N & 1 - g_{\Delta\Delta} U_\Delta \end{vmatrix} =$$

$$(4.82)$$

$$= 1 - g_{NN} U_N - g_{\Delta\Delta} U_\Delta + (g_{NN} g_{\Delta\Delta} - g_{N\Delta}^2) U_N U_\Delta$$

Im Modell von Bäckman und Weise³³ sind in der ersten Näherung alle Kopplungskonstanten gleich:

$$g_{NN} = g_{N\Delta} = g_{\Delta\Delta} = \frac{k^2 f^2}{\omega^2 - k^2 - 1} + \tilde{g} f^2 = g f^2 \quad (4.83)$$

Daraus folgt:

$$\pi_P^{N-\Delta}(k, \omega, T) = \frac{k^2 f_N^2 U_N + k^2 f_\Delta^2 U_\Delta}{1 - g f^2 [U_N + U_\Delta]} = \frac{\pi_N + \pi_\Delta}{1 - g(\pi_N + \pi_\Delta)/k^2} \quad (4.84)$$

In $\pi_P^{N-\Delta}(k, \omega, T)$ sind folgende Graphen enthalten

Bei Vergleich dieses Modells mit einem Ansatz von impulsabhängigen g'_{ik} nach Ref. 33, wo

$$g_{NN} = g_{\pi} + g_N^c \quad (4.86)$$

$$g_{\Delta\Delta} = g_{N\Delta} = g_{\pi} + g_{\Delta}^c$$

mit

$$g_{\pi} = \frac{k^2}{\omega^2 - k^2 - 1} \quad , \quad g_N^c = \frac{1}{3} + \tilde{g} \simeq 0.4$$

und

$$g_{\Delta}^c = \frac{k^2}{k^2 + 1} \left[\frac{1}{1.05 + 0.05 k^2} - 1 \right] + \frac{1}{3(1.05 + 0.05 k^2)} +$$

$$+ \left(\frac{2}{3} \right) \frac{1}{1.58 + 0.02 k^2}$$

lässt sich im Rahmen der verwendeten Näherung Gl. (4.83) gute Übereinstimmung feststellen.

Zusammenfassung:

Unter Berücksichtigung des OPE, Nukleon-Nukleon Korrelationen und Nukleon- Δ_{33} -Resonanz Korrelationen, bekommt der Polarisationsoperator $\Pi(k, \omega, T)$ die Form:

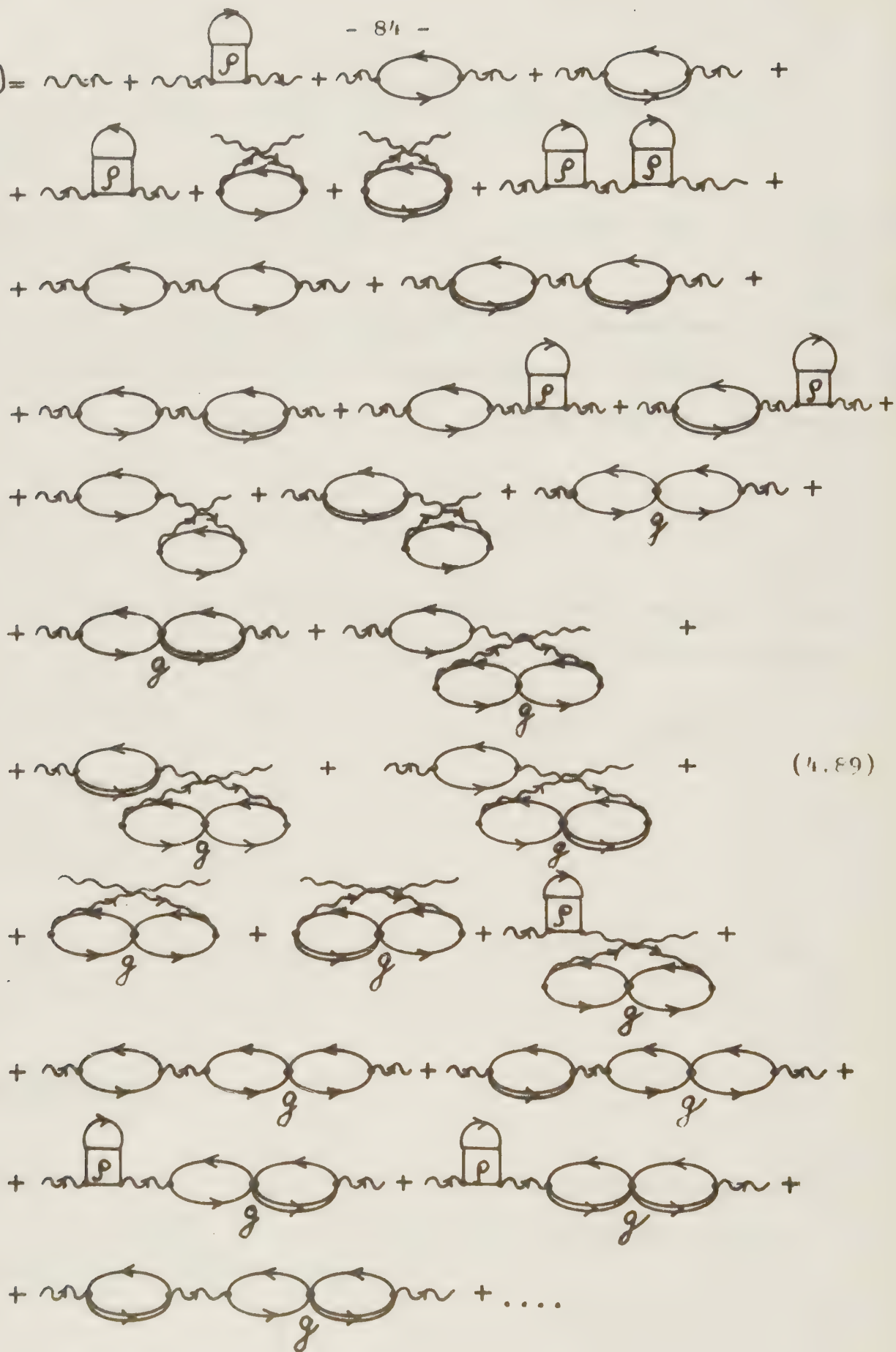
$$\overline{\Pi}(K, \omega, T) = \overline{\Pi}_S(K, \omega, T) + \overline{\Pi}_P^{N-\Delta}(K, \omega, T) \quad (4.87)$$

Im Falle der symmetrischen Kernmaterie ($N = Z$) ist $\overline{\Pi}_S(K, \omega, T) = 0$ (Gl. 4.10). Der Polarisationsoperator wird also graphisch durch Gl. (4.85) dargestellt:

$$\overline{\Pi}_{N=Z}(K, \omega, T) = \overline{\Pi}_P^{N-\Delta}(K, \omega, T) \quad (4.88)$$

Im Falle asymmetrischer Kernmaterie ($N \neq Z$) muss man auch berücksichtigen. Daher gilt für $\overline{\Pi}(K, \omega, T)$:

$\Pi(k, \omega, T) =$
 $N \neq 2$



(4.89)

5. Das Energiespektrum der Pionen in dichter Kernmaterie und seine Interpretation

Das Energiespektrum der Pionen in Kernmaterie erhält man durch Lösung der Dispersionsgleichung (4.3):

$$\omega^2 - m_\pi^2 - k^2 - \Pi(k, \omega, T) = 0 \quad (5.1)$$

Das Energiespektrum ist eine Funktion der Dichte, Temperatur und Ladung der Kernmaterie. Die Pionenkondensation wird aus dem Verhalten des Energiespektrums bei verschiedenen äusseren Parametern festgestellt.

Die verschiedenen Kriterien für die Pionenkondensation werden im nächsten Abschnitt erläutert.

5.1 Die Dispersionsgleichung der Pionen in der Kernmaterie

Die Dispersionsgleichung der Pionen in der Kernmaterie (Gl. 5.1) kann man nach Auswertung der einzelnen Terme des Polarisationsoperators für endliche Temperaturen wie folgt schreiben ($m_\pi = 1$):

$$\omega^2 - 1 - k^2 - \Pi_s(k, \omega, T) - \Pi_p^{N-\Delta}(k, \omega, T) = 0$$

$$\omega^2 - 1 - k^2 + 1.3(\rho^n - \rho^p)\omega - \frac{k^2 f_N^2 U_N + k^2 f_\Delta^2 U_\Delta}{1 - g f^2 [U_N + U_\Delta]} = 0 \quad (5.2)$$

wobei U_N und U_Δ durch Gl. (4.77) definiert sind.

$$U_N = -4 \frac{m_{P_F}^*}{2\pi^2} \phi(k, \omega, p_F, T) \quad (5.3)$$

$$U_\Delta = \frac{1}{4(1-0.23k^2)} \left[\left(\frac{1}{\omega_R - \omega} + \frac{3}{\omega_R + \omega} \right) \rho_n + \left(\frac{1}{\omega_R + \omega} + \frac{3}{\omega_R - \omega} \right) \rho_p \right]$$

mit Gl. (4.47)

$$\phi(k, \omega, p_F, T) = \frac{2\pi^2}{m_{P_F}^*} \int \frac{n^n(\vec{p}, T) - n^p(\vec{p} + \vec{k}, T)}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (5.4)$$

5.2 Das Energiespektrum

Von den Lösungen der Gl. (5.2) interessieren uns insbesondere die komplexen Lösungen, welche Instabilitäten im Pionenspektrum signalisieren. Gl. (5.2) ist eine nichtlineare Integralgleichung, da $\phi(k, \omega, T)$ logarithmische Terme enthält, z.B. im Falle des direkten Graphen (4.48):

$$\phi_1(k, \omega, p_F^n, T) =$$

$$= \frac{2\pi^2}{m_F^*} \int \frac{-n^n(\vec{p}, T)}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \quad (5.5)$$

$$= \frac{1}{2p_F k} \int_0^\infty p dp \frac{1}{e^{(\varepsilon(\vec{p}) - \mu)/T} + 1} \ln \left(\frac{i\omega_m - k^2/2m^* - pk/m^*}{i\omega_m - k^2/2m^* + pk/m^*} \right)$$

Folglich ist die numerische Berechnung der komplexen Lösungen schwierig. Der Anschaulichkeit halber werden die Lösungen erst in einer Näherung und dann exakt berechnet.

a) Approximation der Dispersionsgleichung durch ein Polynom 6-ten Grades in ω .

Die Funktion $\phi(k, \omega, p_F, T)$ kann in eine faktorisierte Form gebracht werden, wobei ein Faktor temperaturabhängig ist und der andere Faktor die Funktion $\phi(k, \omega, T=0)$ ist.

Die Funktionen $n(\vec{p} + \vec{k}) - n(\vec{p})$ aus Gl. (5.4) können durch

$$\text{th} \left(\frac{\varepsilon(\vec{p}) - \mu}{2T} \right) - \text{th} \left(\frac{\varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) - \mu}{2T} \right)$$

ersetzt werden. Z. B. gilt im Fall des direkten Graphen mit

$$p < p_F ; \quad n(\vec{p}) = \frac{1}{e^x + 1} \quad ; \quad \left(x = \frac{p^2/2m^* - p_F^2/2m^*}{T} < 0 \right)$$

die Beziehung:

$$\text{th}\left(\frac{\mathcal{E}(\vec{p})-\mu}{2T}\right) = \text{th} \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \approx \frac{-1}{e^x + 1} = -n(p) \quad (5.6)$$

Die Lindhard-Funktion (5.5) ist dann:

$$\phi_1(k, \omega, p_F, T) = \frac{1}{2p_F k} \int_0^\infty p dp \left(-\text{th} \frac{\mathcal{E}(\vec{p})-\mu}{2T} \right) \ln \left(\frac{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} - \frac{pk}{m^*}}{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} + \frac{pk}{m^*}} \right) \quad (5.7)$$

Ist $p \ll p_F$ dann kann man $\mathcal{E}(\vec{p})$ gegen μ vernachlässigen:

$$\phi_1(k, \omega, p_F, T) = \frac{1}{2p_F k} \text{th} \frac{\mu}{2T} \int_0^\infty p dp \ln \left(\frac{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} - \frac{pk}{m^*}}{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} + \frac{pk}{m^*}} \right) \quad (5.8)$$

Diese Näherung vergrößert den Wert des Integrals. Integriert man nun von Null bis p_F statt bis ∞ , so haben diese zwei Näherungen entgegengesetzte Effekte, so dass sie sich mindestens teilweise aufheben.

Die angenäherte Lindhard-Funktion ist:

$$\phi_1(k, \omega, p_F, T) = \text{th} \frac{\mu(T)}{2T} \frac{1}{2p_F k} \int_0^{p_F} p dp \ln \left(\frac{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} - \frac{pk}{m^*}}{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} + \frac{pk}{m^*}} \right) \quad (5.8a)$$

Wenn man in Betracht zieht, dass für numerische Rechnungen die analytischen Resultate zurücktransformiert werden, indem $i\omega_m$ durch ω ersetzt wird (siehe Anhang 1), ist $\phi(k, \omega, p_F, T)$ nach Vergleich mit Gl.(A₃.7):

$$\phi(k, \omega, p_F, T) = \text{th} \frac{\mu(T)}{2T} \phi(k, \omega, T=0) \quad (5.9)$$

Der Pionen Polarisationsoperator ist damit

$$\Pi(k, \omega, T) \simeq \text{th} \frac{\mu(T)}{2T} \Pi(k, \omega, T=0). \quad (5.10)$$

Für $T \rightarrow 0$, $\text{th} \infty = 1$:

$$\text{th} \frac{\mu(T)}{2T} = \text{th} \infty = 1$$

also

$$\Pi(k, \omega, T \rightarrow 0) = \Pi(k, \omega, T=0) \quad (5.11)$$

d.h. der Polarisationsoperator für Temperatur Null wird im Grenzfall wiedergewonnen.

Das chemische Potential $\mu(T)$ wird durch die Sommerfeld - Entwicklung für endliche Temperatur berechnet¹⁰⁴. Wir verwenden Sommerfeld's Theorem:

Sei

$$I = \int_0^{\infty} d\varepsilon \, n(\varepsilon) \frac{dF}{d\varepsilon} \quad (5.12)$$

mit $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1}$, $F(0) = 0$,

dann ist

$$I = F(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{2n} \eta(2n) \left. \frac{d^{2n} F}{d\varepsilon^{2n}} \right|_{\varepsilon=\mu} \quad (5.13)$$

wobei $\eta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{2n}}$

Das chemische Potential wird aus der Beziehung¹⁰⁴

$$\mu(0)^{3/2} = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} n(\varepsilon) d\varepsilon \quad (5.14)$$

Nach (5.12) gilt¹¹¹

$$\mu(T) = \mu(0) \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{\mu(0)} \right)^2 \right] \quad (5.15)$$

Den Pionen Polarisationsoperator (5.10) kann man als eine lineare Form schreiben, indem man den Logarithmus in $\phi(k, \omega, T=0)$ (Gl. A₃.9) bis zur dritten Ordnung entwickelt:

$$\phi_1(k, \omega) = \frac{\pi^2 g^n}{m^* p_F^n} \frac{1}{\omega - k^2/2m^*} \quad (5.16)$$

wobei $g^n = \frac{(p_F^n)^3}{3\pi^2}$ und $\omega - k^2/2m^* \gg p_F k / m^*$.

Die Dispersionsgleichung (5.2) erhält in dieser Näherung die Form einer algebraischen Gleichung sechsten Grades in ω

deren komplexe Lösungen mit Hilfe eines numerischen Verfahrens¹⁰⁵ gesucht werden.

Das Pionen Spektrum für eine bestimmte Dichte und Temperatur besteht aus sechs Zweigen (siehe Fig. 1), die den Lösungen der Dispersionsgleichung entsprechen. Mit positiver Energie sind die Lösungen für π^+ , mit negativer die für π^- aufgetragen. Der Zweig, der von $\omega_\Delta (-\omega_\Delta)$ ausgeht, ist ein $\Delta^{++}\bar{p}$, $\Delta^+\bar{n} = \Delta_{3/2}^-$ Teilchen, Neutron Loch - (bzw. $\Delta_{3/2}^0\bar{p}$) Zustand. Der von $m_\pi (-m_\pi)$ ausgehende Zweig entspricht den quasi-freien Pionen. Der vom Nullpunkt ausgehende Zweig ist eine Nukleonen Teilchen - Nukleonen Loch $p\bar{n}, n\bar{p}$ Anregung. Nur die reellen Lösungen von Gl. (5.1) sind aufgetragen.

Im Falle der Pionenkondensation sind nur die gebundenen Lösungen ($-m_\pi \leq \omega \leq m_\pi$) interessant. Man bemerkt, dass zwischen k_1 und k_2 keine reellen, sondern komplexe Lösungen existieren, die Instabilität signalisieren. Im Punkt k_1 wird die Bindungsenergie so stark, dass die effektive Masse und die Energie, die man braucht, um ein $\pi^+\pi^-$ Paar zu erzeugen, Null werden. Da Pionen Bosonen sind, können nun beliebig viele Pionen im selben Zustand entstehen. Dieses Phänomen nennt man Pionenkondensation.

Es ist zu erwarten, dass die Temperatur die Entstehung beliebig vieler Bosonen im selben Zustand (der kollektive Charakter sollte nicht vergessen werden) verhindern kann.

Durch Untersuchung der Lösungen für verschiedene Temperaturen ergibt sich die Existenz einer kritischen Temperatur, ab

welcher keine Kondensation mehr möglich ist.

In Fig. 1 ist das Spektrum für den Fall symmetrischer Kernmaterie ($N = Z$) unter Berücksichtigung von Nukleon-Korrelationen bei normaler Kerndichte ($\rho = \rho_0 = 0.46 m_x^3$) für verschiedene Temperatur dargestellt. Man bemerkt, dass bei hohen Temperaturen (Fig. 1c) der Bereich, in dem Kondensation stattfindet, verschwindet.

Die Dispersionsgleichung ist stark dichteabhängig. In den Figuren 2, 3, 4 sind die Spektren für asymmetrische Kernmaterie (10% Protonen, 90% Neutronen) bei verschiedenen Dichten gezeichnet. Im Unterschied zu der symmetrischen Kernmaterie liegen die komplexen Lösungen nicht bei $\text{Re } \omega = 0$, sondern sie haben einen kleinen Realteil ($\omega = \mu_n - \mu_p$). Dieser Realteil ist z.B. die Verbindungslinie der Punkte k_1 und k_2 in Fig. 3a. Physikalisch bedeutet dieses, dass die effektive Masse der Pionen bei Kondensation von Null verschieden ist.

b) Exakte Bestimmung des Energiespektrums der Pionen in der Kernmaterie

Eine exakte Lösung der Dispersionsgleichung (5.2) kann man durch eine numerische Integration von $\phi(k, \omega, T)$ (5.4) und der numerischen Lösung der resultierenden Gleichung (5.2) erhalten.

Einen guten Einblick in die Problematik dieser Methode erhält man für den speziellen Fall $T = 0$, da $\phi(k, \omega, T=0)$ (Gl. A₃.7) analytisch integrierbar ist und das Problem dadurch anschaulicher

wird. Die integrierte Funktion $\phi(k, \omega, T=0)$ (Gl. A₃.9 für den direkten Graphen):

$$\phi_1(k, \omega) = \frac{m^*{}^2}{2p_F k^3} \left\{ \frac{(\omega - k^2/2m^*)^2 - \frac{p_F^2 k^2}{m^*{}^2}}{2} \ln \left(\frac{\omega - k^2/2m^* + p_F k/m^*}{\omega - k^2/2m^* - p_F k/m^*} \right) - \left(\omega - \frac{k^2}{2m^*} + \frac{p_F k}{m^*} \right) \right\} \quad (5.17)$$

hat eine logarithmische Unstetigkeit¹⁰⁶ für einen Bereich von ω , gegeben durch die Ungleichung $|\omega \pm k^2/2m^*| \leq k p_F / m^*$.

Dieser Bereich ist der Teilchen-Loch Anregungsbereich, in dem der Prozess $p + \pi^- \rightarrow n$ oder $n + \pi^+ \rightarrow p$ stattfinden kann. Wie in der Theorie der Plasmonen^{68, 107, 108} enthält dieser Bereich ein Kontinuum von Zuständen. Im Fall der Kernmaterie sind diese Zustände Teilchen-Loch Anregungen mit den Quantenzahlen eines Pions ($n\bar{p}$ oder $p\bar{n}$). Die Grenzen dieses Bereiches sind in Fig. 5 für $N = Z$ aufgetragen. Ab einer Dichte ρ_c erhält man in diesem Teilchen-Loch- oder Paar-Anregungsbereich für einen Impuls k_c eine Lösung der Dispersionsgleichung. Die Lösung liegt für $N = Z$ auf der $\omega = 0$ Achse und entspricht dem Zustand eines $\pi^+\pi^-$ -Paares mit gleicher kritischer Energie $\omega(\pi^+) = \omega(\pi^-) = 0$ und Impuls $\vec{k}(\pi^+) + \vec{k}(\pi^-) = 0$. In diesem Punkt kann man $\pi^+\pi^-$ Paare (kollektive Anregungen) ohne Zufuhr von Energie und Impuls erzeugen, und die Pionenkondensation findet statt. Dasselbe gilt auch für die π^0 Pionen. Erhöht man die Dichte der Kernmaterie, $\rho > \rho_c$, so vergrößert sich der k -Bereich, in dem die Kondensation einsetzt.

In Fig. 5 sind die reellen Lösungen ω gegen k aufgetragen. Sie haben die Form einer geschlossenen Kurve im Teilchen - Loch Bereich. Da hier jedoch $\text{Im } \Pi(k, \omega, \tau) = 0$ nur für $\omega = 0$ gilt⁶⁸, sind nur die Schnittpunkte der Kurve mit der Linie $\omega = 0$ ¹²⁷ physikalisch gerechtfertigte Lösungen. Sie entsprechen den Punkten k_1 und k_2 der Figuren 1 - 3. Die restlichen Lösungen in diesem k -Bereich, deren Realteil auf der "Ellipse" liegt, sind komplex.

Die Lösungen der Dispersionsgleichung (5.1) sind mit den Polen des Pionenpropagators (Gl. 4.2a) identisch:

$$\Delta_{\pi}(\omega, k, \tau) = \frac{1}{\omega^2 - k^2 - m_{\pi}^2 - \Pi(k, \omega, \tau)} \quad (5.18)$$

Wir wiederholen die Diskussion der Lösungen der Dispersionsgleichung in der Sprache der Propagatorpole, in der komplexen ω -Ebene.

- 1) Für einen gegebenen Impuls k für $\rho < \rho_c$ sind die Pole des Propagators, wie folgt, verteilt:

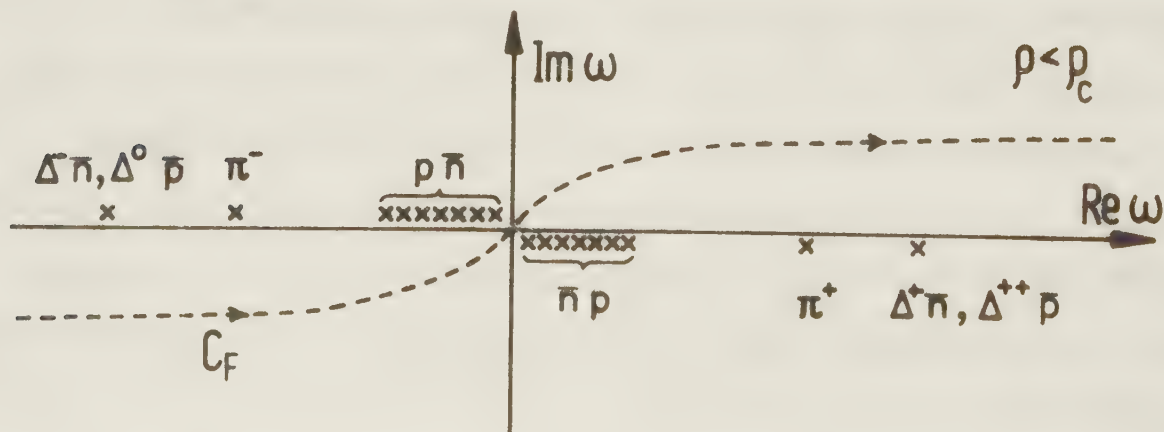


Fig. 5.1

(Gl. 4.8)

$$\rho_\pi = 2\mu_\pi \langle \phi^2 \rangle \quad (5.20)$$

und bei kritischer Dichte ρ_c divergiert,

$$\langle \phi^2 \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \lim_{t' \rightarrow t-0} \Delta_\pi(x-x', t-t') \rightarrow \infty \quad (5.21)$$

folgt, dass für $k = k_1$ oder $k = k_2$; ($\rho = \rho_c$) die π^+ und π^- Ladung divergiert, d.h. es können sehr viele $\pi^+\pi^-$ Paare oder π^0 entstehen (die Ladung bleibt erhalten). In diesen Punkten tritt Pionenkondensation auf.

- 3) Für $\rho > \rho_c$ ($k_1 < k < k_2$) bewegen sich die Pole des Propagators auf der imaginären Achse ($\text{Im } \omega$) (siehe Fig. 5.3) hinauf und hinunter.

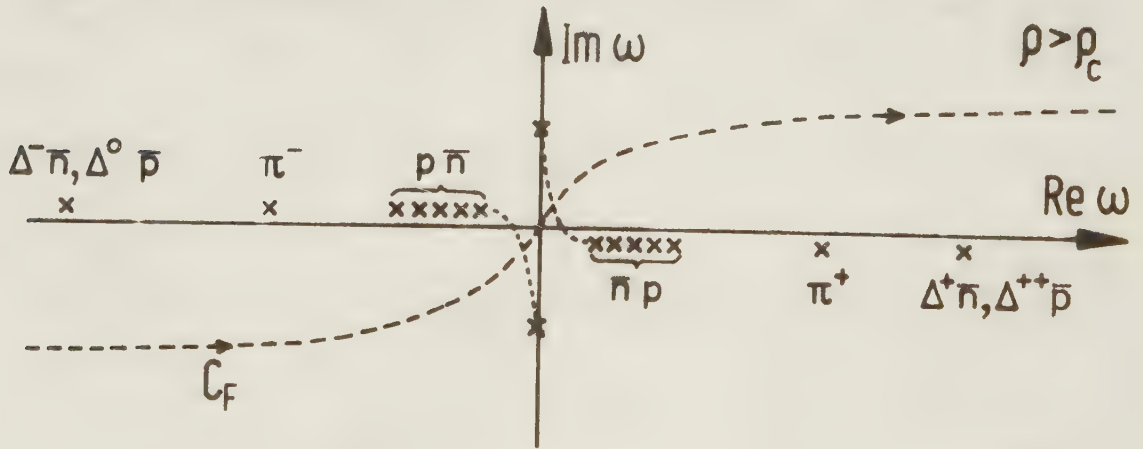


Fig. 5.3

Hier treten Pole des Propagators für $\text{Im } \omega \neq 0$ auf, was ebenfalls zu entarteten Pionenzuständen (Pionenkondensation)

mit endlicher Lebensdauer führt.

Lösungen der Dispersionsgleichung bei endlichen Temperaturen

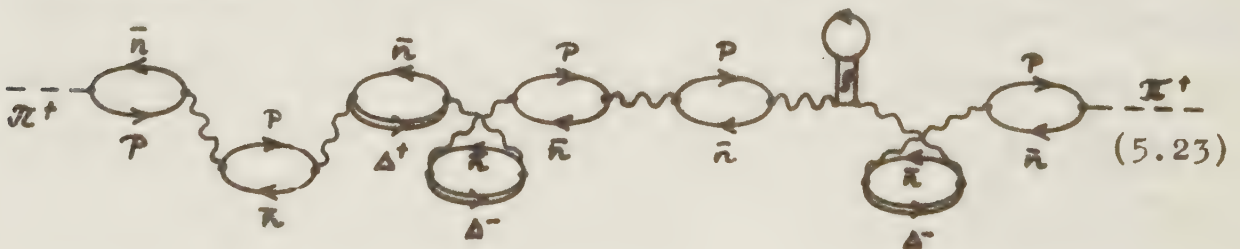
Für endliche Temperaturen ($T \neq 0$) wird $\phi(k, \omega, T)$ (Gl. 5.4) numerisch integriert. Man erhält ähnliche Resultate wie für $T = 0$. Auch diesmal kann man zeigen⁶⁸, dass $\Im \Pi$ auf der Achse $\omega = 0$ gleich Null ist ($\Im \Pi(k, \omega, T) = 0$). Folglich sind nur die Endpunkte der Kurve physikalisch gerechtfertigte Lösungen im Paar-Anregungsbereich. Was sich jedoch mit zunehmender Temperatur ändert, ist der K -Bereich ($k_1 < k < k_2$), in dem die Kondensation stattfindet. Mit steigender Temperatur nimmt dieser Bereich für eine gegebene Dichte ab, was aus Fig. 6 zu ersehen ist. Bei einer bestimmten kritischen Temperatur $T_c(\rho)$ reduziert sich der K -Bereich auf einen Punkt. Erhöht man bei dieser Dichte die Temperatur über T_c , so tritt keine Pionenkondensation mehr auf. Die Existenz einer solchen kritischen Temperatur ist für jedes Fermi-System, das Instabilitäten in kollektiven Schwingungszuständen besitzt, zu erwarten¹⁰⁷.

5.3 Kriterien für die Pionenkondensation

Aus der Analyse der Lösungen der Dispersionsgleichung im vorhergehenden Abschnitt gehen die Kriterien der Pionenkondensation hervor. Bei Dichten $\rho \geq \rho_c$ haben wir für $N = Z$ Lösungen im Teilchen-Loch Anregungsbereich gefunden, in dem die Prozesse

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + \pi^- \\ p &\rightarrow n + \pi^+ \end{aligned} \quad (5.22)$$

stattfinden. In diesen Prozessen wird die Baryonenzahl erhalten. Die Anregungen propagieren sich durch Quasi-Teilchen-Loch Anregungen, die sich zu den Quantenzahlen des Pions koppeln. Die baryonischen Quasiteilchen sind Protonen, Neutronen und Δ_{33} -Resonanzen. Die Anregung propagiert also durch eine Spin - Isospin Welle. Eine mögliche Darstellung der Anregung ist:



Die Wellenlinie $\sim$ beschreibt die gesamte Wechselwirkung der Baryonen aus Gl. (4.89), --- beschreibt ein Pion im Vakuum. In β -stabiler Kernmaterie laufen die Prozesse (5.22) entsprechend der Bilanzgleichung der chemischen Potentiale ab:

$$\mu_n - \mu_p = \mu_\pi \quad (5.24)$$

Kriterium 1

Pionenkondensation setzt also ein, wenn die Dispersionsgleichung eine Lösung für $\omega = \mu_\pi$ hat:

$$\Delta_\pi^{-1}(k, \omega = \mu_\pi = \mu_n - \mu_p) = \omega^2 - k^2 - m_\pi^2 - \Pi(k, \omega, T) \Big|_{\omega = \mu_\pi} = 0 \quad (5.25)$$

Kriterium 2

Ein äquivalentes Kriterium für Pionenkondensation ergibt die Analyse der Figuren 5.1 - 5.3. Pionenkondensation, eine Phasenumwandlung zweiter Ordnung findet statt, wenn der Erwartungswert der Pionenladung divergiert (5.21), nämlich:

$$\langle \phi \phi^\dagger \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \lim_{t' \rightarrow t-0} \Delta_\pi(x - x', t - t') \rightarrow \infty \quad (5.26)$$

Schreibt man $\Delta_\pi(\omega)$ als eine Summe von Polen (wie in den Figuren 5.1 - 5.3 dargestellt), so ist Gl. (5.26) nur dann erfüllt (Fig. 5.2), wenn zwei Pole aus entgegengesetzten Richtungen der reellen Achse $\text{Re } \omega$ zusammenkommen. Dieses Kriterium ist mit dem obigen (5.25) äquivalent.

Kriterium 2a

Der Pionenpropagator kann um einen Pol ω_c in einer Laurent-Reihe entwickelt werden¹⁰⁶:

$$\Delta_{\pi}(\omega) = \left[(\omega - \omega_i) \frac{\partial \Delta_{\pi}(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_i} \right]^{-1} \quad (5.27)$$

Das Kriterium (5.25) ergibt Divergenz für

$$\frac{\partial \Delta_{\pi}(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_i} \rightarrow 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \Delta_{\pi}(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_i} = \left(2\omega - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega_i} \quad (5.28)$$

was dem Migdal'schen Kriterium entspricht^{19, 36, 110}.

Im Fall der ungeladenen Pionen (π^0) finden die Prozesse

$$\begin{aligned} & (\mu_{\pi^0} = 0) \\ & n \rightleftharpoons \pi^0 + n \quad \quad p \rightleftharpoons \pi^0 + p \end{aligned} \quad (5.29)$$

statt. Der Propagator ist ausschliesslich ω^2 abhängig. Man erhält also symmetrische Lösungen zum Ursprung $\omega + i\varepsilon$ und $-\omega - i\varepsilon$. Das Kriterium für Kondensation ist erfüllt, wenn zwei Pole sich kreuzen, also ω^2 durch Null geht.

Für symmetrische Kernmaterie ($N = Z$) ist die Differenz der chemischen Potentiale der Neutronen und Protonen gleich Null:

$\mu_n - \mu_p = \mu_{\pi} = \omega = 0$. Die doppelten Pole entstehen auf der $\omega = 0$ Achse. $\pi^+\pi^-$ Paare und π^0 's werden angeregt.

Für asymmetrische Kernmaterie ($N \neq Z$), wo $\mu_n \neq \mu_p$, liegen die doppelten Pole auf einer Linie $\omega = \mu_n - \mu_p \neq 0$.

6. Das Phasendiagramm der Pionenkondensation

Aus dem Energiespektrum der Pionen wird durch Anwendung der Kriterien für Pionenkondensation (5.25 - 5.26) das Dichte - Temperatur Zustandsdiagramm abgeleitet.

Ein wichtiger Punkt ist der Schnitt der Grenzkurve mit der Abszisse, der die kritische Dichte ρ_c bei $T = 0$ liefert. Mit diesem Wert von ρ_c bei $T = 0$ beschäftigen sich alle vorangegangenen Arbeiten. Die kritische Dichte ρ_c wurde im Bereich $1/2 \rho_0 < \rho_c < 2 \rho_0$ gefunden. Die Abweichungen hängen von der Behandlung der Korrelationen ab. Ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung der Nukleonen mit Resonanzen (Δ_{33} - N Korrelation) ist $\rho_c \approx \rho_0/2 < \rho_0$ (Migdal, Ref. 9 - 21). Bei Mitnahme der Δ_{33} - N Korrelation ist die kritische Dichte $\rho_0 < \rho_c \leq 2 \rho_0$ (Ref. 25 - 32). In dieser Arbeit wird die kritische Dichte als Funktion der Temperatur für die obigen Modelle berechnet.

6.1 Das Temperatur - Dichte Diagramm

Die kritische Temperatur als Funktion der Dichte $T_c(\rho)$, die den Beginn der Pionenkondensation charakterisiert, ist in Fig. 6.1 in einem Phasendiagramm dargestellt.

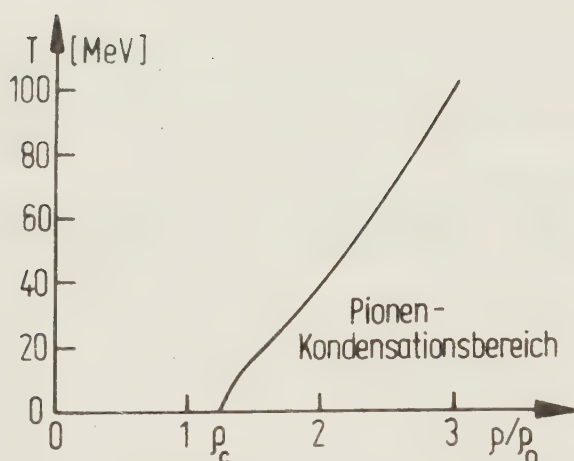


Fig. 6.1

Unterhalb der Kurve $T_c(\rho)$ ist Kondensation möglich, darüber nicht. Für die verschiedenen Modelle und Korrelationsparameter erhält man eine Anzahl von Kurven, die in den Figuren 7, 8, 9 für symmetrische Kernmaterie dargestellt sind.

1. Bei Vernachlässigung der Nukleonen- Δ_{33} -Resonanz-Korrelationen (das Modell von Migdal und Mitarbeitern¹⁹⁻²¹), bekommt man, wie erwartet, eine Kurve, die für $T = 0$ bei der kritischen Dichte $\rho_c \sim \rho_0/2$ beginnt (Fig. 7).
2. Berücksichtigt man die Nukleonen- Δ_{33} -Resonanz-Korrelation (das Modell von Brown und Weise für $T = 0$ ²⁵⁻³⁰), erhält man höhere Werte für die kritische Dichte (Fig. 8). Die Kurven sind mit den Parametern

$$1) \quad g = 0.4$$

$$2) \quad g = 0.5$$

$$3) \quad g = 0.6$$

in Gl. (4.83) gerechnet. Man bemerkt eine äusserst hohe Empfindlichkeit gegenüber der Korrelationskonstante g . Für $\rho = \rho_0$ ergibt sich z.B. ein durch g bedingter Temperaturbereich $0 \leq T_c \leq 40 \text{ MeV}$.

3. Der Vergleich dieser Rechnungen (mit $g = 0.5$ aus Gl. (4.83)) mit gekoppelten Kanal Rechnungen (Bäckman und Weise³³), die impulsabhängige g Parameter (4.86) liefern, ergibt eine gute Übereinstimmung (Fig. 9).

Auf Grund dieser Ergebnisse (Fig. 10) kann man die T - Ebene in drei Bereiche teilen:

- I - ohne Instabilitäten im Pionenspektrum
- II - stark modellabhängige Resultate
- III - Pionenkondensation tritt verhältnismässig unabhängig von den Parametern der Theorie auf.

Als glaubhaftester Wert des Korrelationsparameters wird $g = 0.5$ anerkannt^{25,128}. Dieser Wert wurde mit Hilfe von kernphysikalischen Rechnungen, die das Reid'sche soft-core Potential und zusätzliche Beiträge der kurzreichweitigen Korrelationen (ρ^- und ω -Meson Austausch) verwenden, berechnet³³.

Man erwartet, dass die Grenze der zwei Bereiche ohne Kondensation und mit Kondensation in der Nähe der Kurve 2 liegt. Das ergibt für $N = Z$ Dichtewerte $\rho_c(T_c = 0) \sim 1.2 \rho_0$ und

$$\rho_c(T_c = 40 \text{ MeV}) \sim 2 \rho_0 .$$

7. Anwendungen und Ausblick

Das in dieser Arbeit berechnete Modell stellt einen Idealfall dar. Für Anwendungen in der Kernphysik ist es wichtig, die Randbedingungen, Zusammensetzung, inhomogene Dichteverteilung, zeitliche Veränderung von Parametern usw. der Kernmaterie zu berücksichtigen. Besonders interessant ist die Veränderung der Kerneigenschaften (Viskosität, Anregungsmechanismen, Pionenschauer usw.) unter extremen Bedingungen durch Pionenkondensation. In stabilisierter Kernmaterie (Neutronensterne) können auch länger dauernde Prozesse (z.B. β -Zerfall) durch Pionenkondensation beeinflusst werden.

7.1 Pionenkondensation in Atomkernen

Der Effekt der endlichen Ausdehnung der Kernmaterie (in Atomkernen) auf die Entstehung von Pionenkondensation wurde von Migdal und Mitarbeitern^{14-18, 55, 58, 59} besprochen (in ihrem Modell ist $\rho_c < \rho_0$). Es wird gezeigt, dass die von der periodischen Spin-Isospin Struktur hervorgerufene periodische Neutronen- und Protonendichte zu einer geschichteten Struktur des Kernes führen, was sich in den Experimenten mit pionischen Atomen^{53, 124} und bei Elektron-, Pion- oder Proton-Streuung an polarisierten Kernen^{15, 16, 56, 59} bemerkbar machen sollte. Sapershstein und Troitskii⁵⁴ erklären die Erhöhung der ℓ -verbotenen M 1 Übergänge mit der Präsenz von Pionenkondensation

in Kernen.

Unsere Rechnungen, die die $N-\Delta_{33}$ Korrelationen mitberücksichtigen (bei Migdal vernachlässigt), zeigen, dass die kritische Dichte ρ_c über der normalen Dichte der Kernmaterie ($\rho_c > \rho_0$) liegt. Daraus schliessen wir, dass Pionenkondensation eher in Schwerionenstössen bei mittleren Energien ($0.2 \text{ GeV} \leq E/\mu_{\text{Nukleon}} \leq 2 \text{ GeV}$), mit Dichten von mindestens $2\rho_0$ (bei Überlappen der Kerne) oder bis $(4-6)\rho_0$ (in Schockwellen) auftritt, als dass sie sich in Grundzustandseigenschaften bemerkbar macht. Bei diesem Prozess sind die beteiligten Kerne zusätzlich in hochangeregten Zuständen, so dass der Begriff der Temperatur in die Rechnungen eingeführt werden muss, was zur Verringerung der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Kondensates führen kann. Bei der Betrachtung des Phasendiagramms $T_c(\rho)$ (Fig. 10) zeigt sich jedoch, dass der gerechnete Bereich für das Auftreten von Schockwellen⁷⁹ innerhalb des berechneten Pionenkondensationsbereiches liegt^{7, 80}.

Die beim Schwerionenstoss zusätzlich zu berücksichtigende endliche Ausdehnung der beteiligten Kerne $\leq 10 \text{ fm}$ und die endliche Stosszeit $\leq 3 \cdot 10^{-23} \text{ sec}$, in der das Kondensat entstehen soll, sind weitere wichtige Aspekte, die man in Betracht ziehen muss. Das Pionenkondensat bildet sich in unendlicher Kernmaterie bei einem kritischen Impuls von $k_c \approx 2 m_\pi$. Die minimale dazugehörige kritische Ausdehnung ist $R_c \sim 1 \text{ fm}$ (Ruck et al.⁷). Die aus den komplexen Lösungen der Dispersionsgleichung

chung berechnete Zeit für die Entstehung eines Kondensates ist $\tau_c = 1 \cdot 10^{-23} \text{ sec}$. Ein Vergleich dieser Parameter deutet darauf hin, dass die Ausbildung eines Pionenkondensates in Schwerionenstößen nicht ausgeschlossen ist. Das wiederum kann zum "Aufweichen" (softening) der Zustandsgleichung des Systems $W(\rho, T)$ führen. Eine solche "Aufweichung" der Zustandsgleichung für $T = 0$ wurde für $\rho > \rho_c$ im Fall von Neutronensternen berechnet^{23, 29}. Im Schwerionenstoss könnte diese "Aufweichung" zu höherer Kompression und damit zu einer Senkung der Schockwellenkurven in Fig. 10 führen. Quantitative Aussagen können jedoch mit der in dieser Arbeit verwendeten Propagatoren-Methode nicht gemacht werden. Dazu müsste man mit einer von Walecka¹¹³ entwickelten Methode weitere Untersuchungen durchführen.

Die Existenz pionischer Instabilitäten kann andererseits wiederum bei der Entstehung von Schockwellen in Schwerionenstößen bedeutend sein^{7, 80}. Die kritische Streuung, die mit dem Einsetzen des Phasenübergangs zweiter Ordnung (pionischer Instabilitäten) verbunden und durch die Divergenz der Spin - Isospin Dichte Fluktuation gekennzeichnet ist, kann zur Verringerung der longitudinalen Impuls-Zerfallslänge und dadurch zur Verbesserung der Hydrodynamik, die das Auftreten von Schockwellen in Schwerionenstößen vorhersagt^{7, 80, 123} führen. Zur Lösung dieser Probleme ist jedoch die Entwicklung einer Methode zur Behandlung endlicher Kernmaterie erforderlich.

7.2 Pionenkondensation in Neutronensternen

Das Entstehen und Erhalten von Pionenkondensation in hochangeregter unendlicher Kernmaterie hat eine unmittelbare Konsequenz für die Physik der Neutronensterne, speziell für die Berechnung der Zustandsgleichung und der Abkühlung von Neutronensternen. In allen vorangegangenen Arbeiten wurden die Eigenschaften pionenkondensierter Sterne für $T = 0$, also für Kernmaterie im Grundzustand, betrachtet. Es wurde gezeigt, dass die Berücksichtigung der Pionenkondensation zu einer "Aufweichung" der Zustandsgleichung führt, wonach die maximal erlaubte Masse und die Radius-Masse Beziehung verändert wird^{23, 25, 45}. Dies führt zu einer Verkleinerung des Durchmessers pionenkondensierter Sterne in Bezug auf "normale" Sterne derselben Masse²⁸.

In Supernovae (Vorstadium der Neutronensterne) ist die Kernmaterie jedoch extrem stark aufgeheizt, und die Kerne des Neutronensterns kurz nach seiner Entstehung sind hochangeregt, was bei der Aufstellung der Zustandsgleichung berücksichtigt werden muss^{44, 113}.

Die Abkühlung der Neutronensterne durch Abstrahlung von Neutrinos³⁵ wird durch Pionenkondensation stark beschleunigt^{28, 35, 44, 60}. In diesem Prozess übernimmt ein Baryon von einem kondensierten Pion eine Energie von der Grösse des chemischen Potentials der Pionen μ_π und zerfällt anschliessend in ein anderes Baryon zuzüglich eines Elektrons und eines Neutrinos. Es findet also beim Auftreten von Pionenkondensaten

ein induzierter β -Zerfall statt, der zur Abkühlung des Neutronensternes beiträgt. Diese Phänomene müssten unter Berücksichtigung der Temperatur ebenfalls untersucht werden.

Figurenbeschreibung

Fig. 1: Das Pionenspektrum (in der Näherung Gl. (5.10)) für normale Dichte ($\rho = \rho_0$) der symmetrischen Kernmaterie ($N = Z$) bei den Temperaturen: a) $T = 0$ MeV; b) $T = 10$ MeV und c) $T = 100$ MeV. Der Teilchen-Loch Anregungsbereich, in dem der Prozess $p + \pi^- \rightarrow n$ oder $n + \pi^+ \rightarrow p$ stattfinden kann, befindet sich innerhalb der gestrichelten Linien $|\omega \pm k^2/2m^*| = p_F k/m^*$. Die $N - \Delta_{33}$ Korrelation ist vernachlässigt. Im Bereich zwischen k_1 und k_2 treten komplexe Lösungen auf, die auf Instabilität des Systems bezüglich der Produktion von $\pi^+\pi^-$ Paaren deuten.

Fig. 2: Das Pionenspektrum (in der Näherung Gl. (5.10)) für asymmetrische Kernmaterie im Verhältnis 10% Protonen und 90% Neutronen, bei der Dichte $\rho = 1/2 \rho_0$ und der Temperatur $T = 0$. Die gebundenen Lösungen sind reell.

Fig. 3: Das Pionenspektrum (in der Näherung Gl. (5.10)) für asymmetrische Kernmaterie (10% Protonen, 90% Neutronen) bei normaler Dichte ($\rho = \rho_0$) und den Temperaturen a) $T = 0$ MeV; b) $T = 10$ MeV und c) $T = 100$ MeV. Im Bereich zwischen k_1 und k_2 treten komplexe Lösungen auf. Dies deutet auf die Instabilität des Systems bei

dieser Dichte bezüglich der Produktion von $\pi^+\pi^-$ Paaren.

Fig. 4: Das Pionenspektrum (in der Näherung Gl. (5.10)) der asymmetrischen Kernmaterie (10% Protonen, 90% Neutronen) für Dichte $\rho = 2\rho_0$ und Temperaturen: a) $T = 0$ MeV; b) $T = 10$ MeV und c) $T = 100$ MeV.

Fig. 5: Das exakte Pionenspektrum für symmetrische Kernmaterie bei Dichte $\rho = 2\rho_0$. $R\omega$ ist als Funktion des Impulses k aufgetragen. Der Teilchen-Loch Anregungsbereich ist durch $|\omega \pm k^2/2m^*| \leq k p_F / m^*$ gekennzeichnet. Der k -Bereich, in dem Kondensation entstehen kann, ist durch die Endpunkte der geschlossenen Kurve im Teilchen-Loch Anregungsbereich gegeben. Dieser k -Bereich wird für die Temperaturen $T = 0$ MeV, $T = 20$ MeV und $T_c = 38$ MeV verglichen.

Fig. 6: Das exakte Pionenspektrum für symmetrische Kernmaterie bei der Temperatur $T = 20$ MeV. $R\omega$ ist als Funktion des Impulses k aufgetragen. Der Teilchen-Loch Anregungsbereich ist durch $|\omega \pm k^2/2m^*| \leq k p_F / m^*$ gekennzeichnet. Der k -Bereich, in dem Kondensation stattfindet, ist durch die Endpunkte der geschlossenen Kurve im Teilchen-Loch Anregungsbereich gegeben.

Dieser k -Bereich wird für die Dichten $\rho = 2\rho_0$ und $\rho_c = 1.6\rho_0$ verglichen.

Fig. 7: Phasendiagramm für Pionenkondensation unter Berücksichtigung der S- und P-Wellen πN Wechselwirkung, der Δ_{33} -Resonanzen und der N-N Korrelation. Die N - Δ_{33} Korrelation ist vernachlässigt. Bei $T = 0$ erhalten wir den kritischen Wert, $\rho_c \simeq \rho_0/2$, von Migdal.

Fig. 8: Phasendiagramm für Pionenkondensation. Die S- und P-Wellen πN Wechselwirkung, die $\pi \Delta_{33}$ Wechselwirkung, die N-N und N- Δ_{33} Korrelationen sind berücksichtigt. Der Korrelationsparameter g aus Gl. (4.83) hat die Werte:

- 1) $g = 0.4$
- 2) $g = 0.5$
- 3) $g = 0.6$

Fig. 9: Vergleich der Resultate mit $g = 0.5$ aus Gl. (4.83) (Kurve 2 in Fig. 8) und den impulsabhängigen g 's nach Gl. (4.86) (gekoppelte Kanalrechnungen).

Fig. 10: Zusammenfassung der Resultate. Die Kurven sind mit folgenden Parametern gerechnet worden:

- a) - ohne N- Δ_{33} Korrelation (Kurve 1 aus Fig. 7)

1)- mit N- Δ_{33} Korrelation, g aus Gl. (4.83),
g = 0.4

2)- mit N- Δ_{33} Korrelation, g aus Gl. (4.83),
g = 0.5

BW- mit N- Δ_{33} Korrelation, g aus Gl. (4.86)

b)- mit N- Δ_{33} Korrelation, g aus Gl. (4.83) und
dem extrem hohen Wert g = 0.6

Die gestrichelten Linien sind die berechneten Schockwellen Kurven⁷⁹.

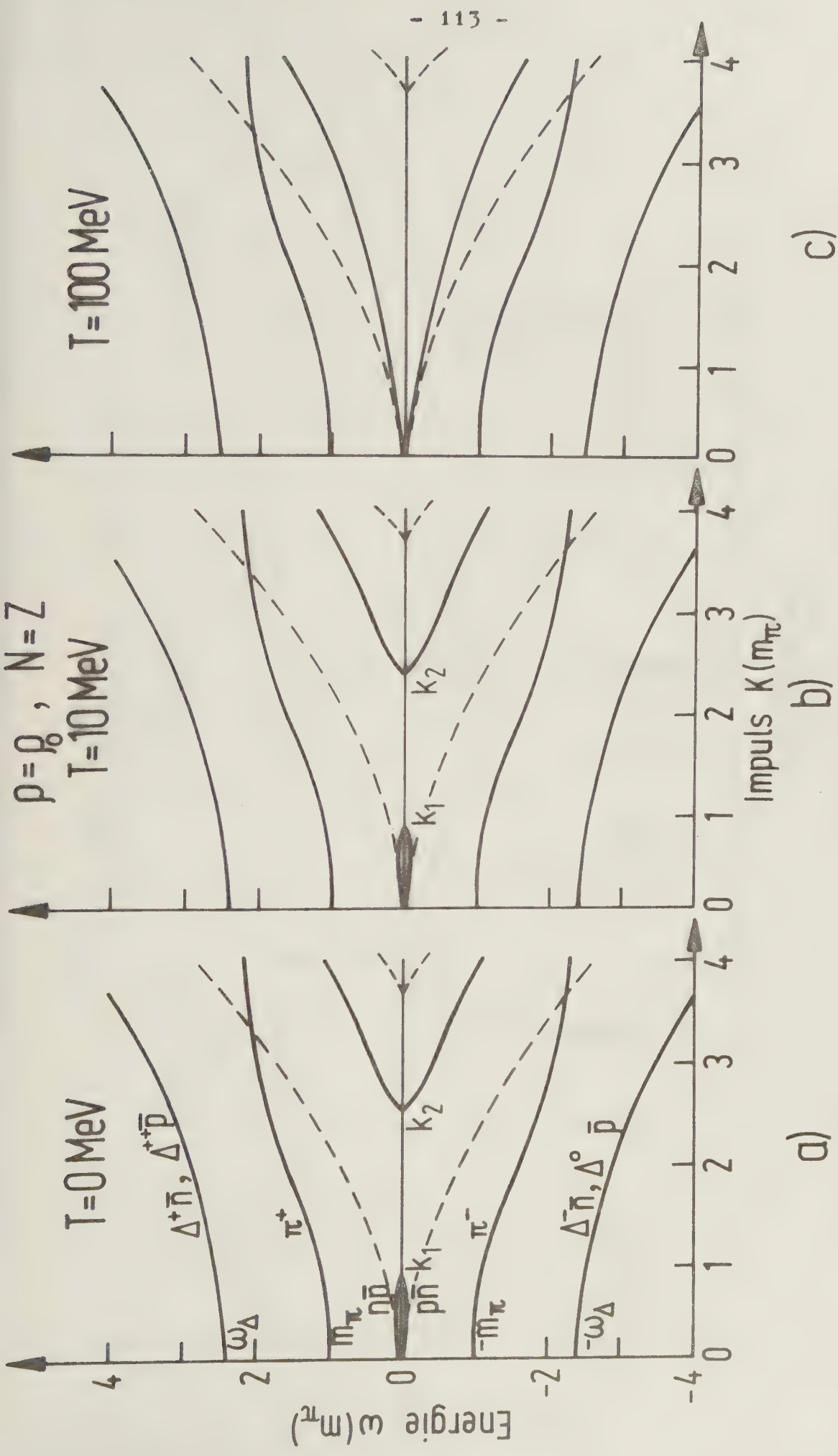


Fig.1

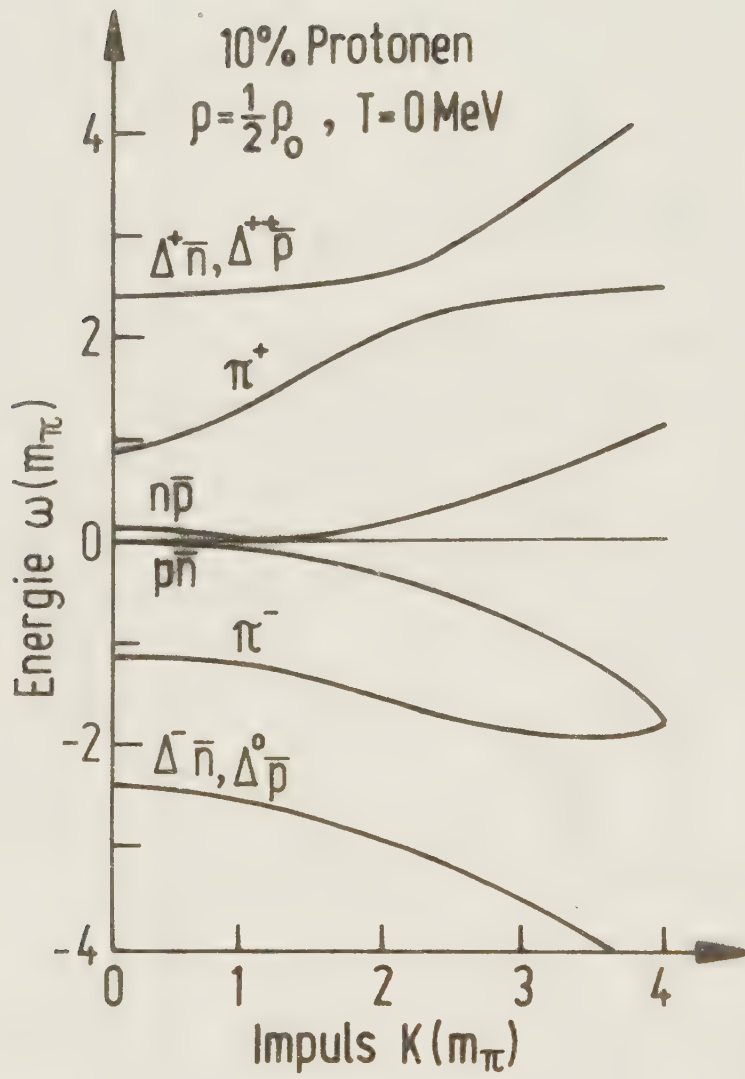


Fig.2

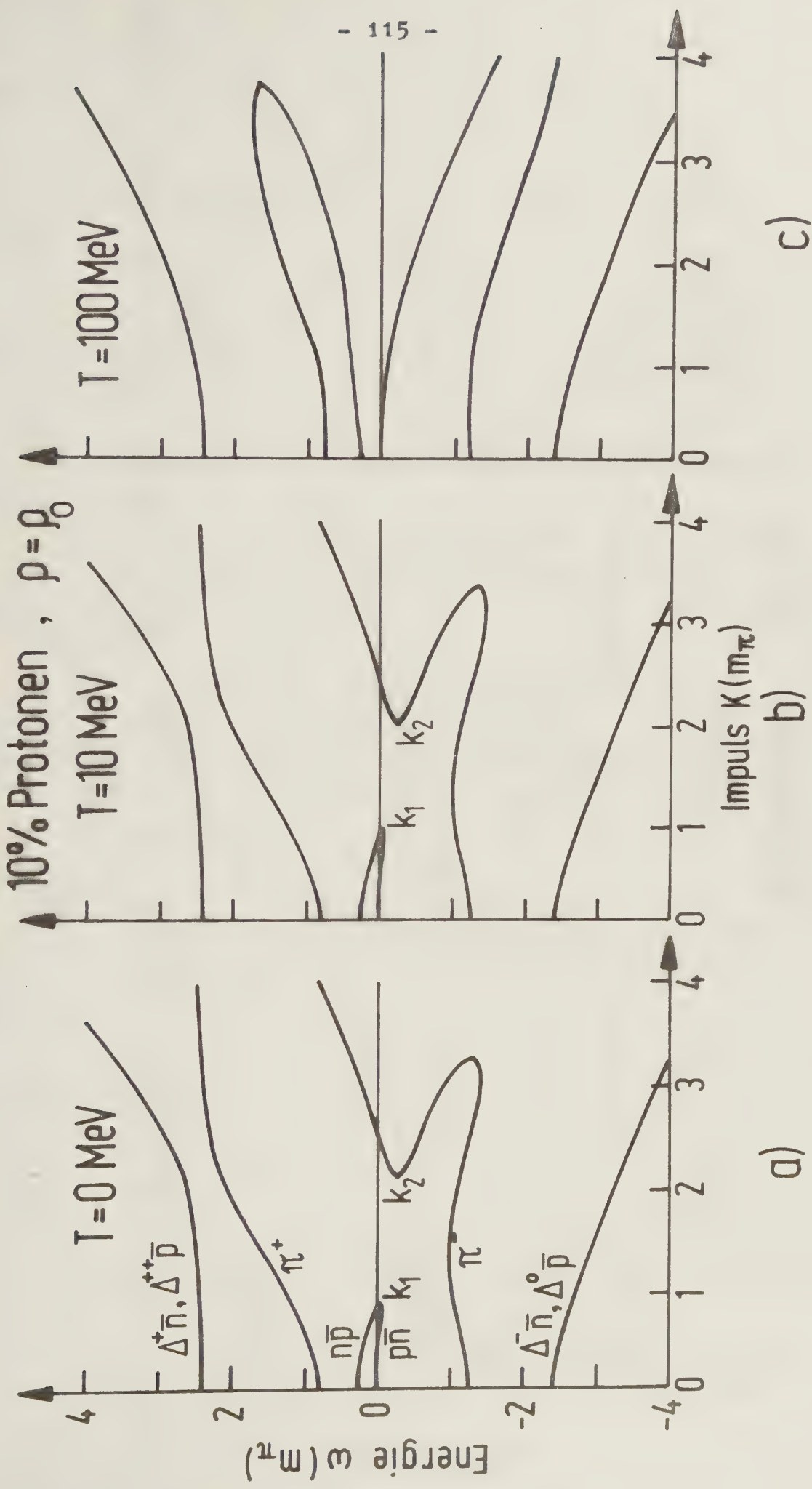


Fig. 3

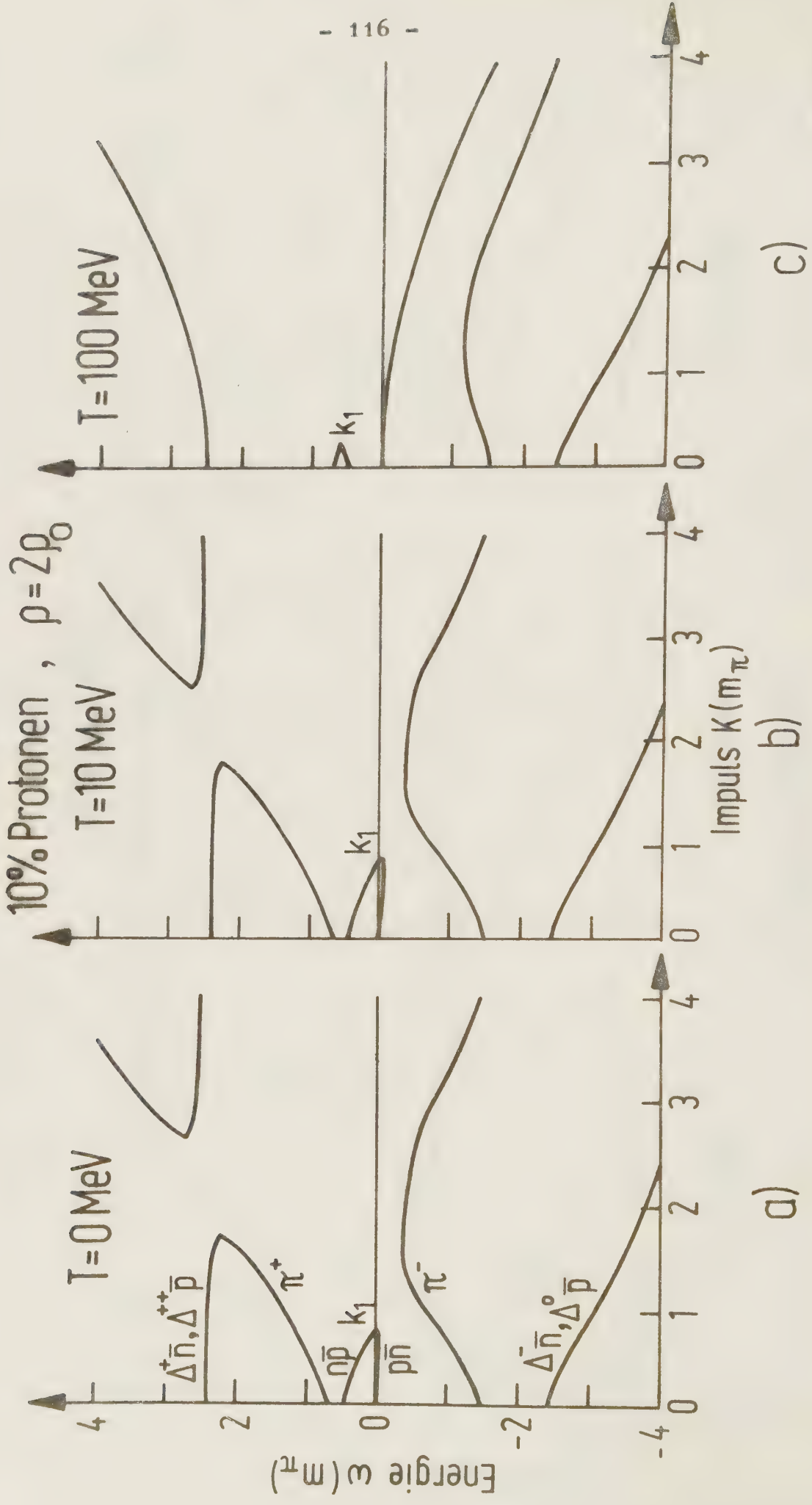


Fig. 4

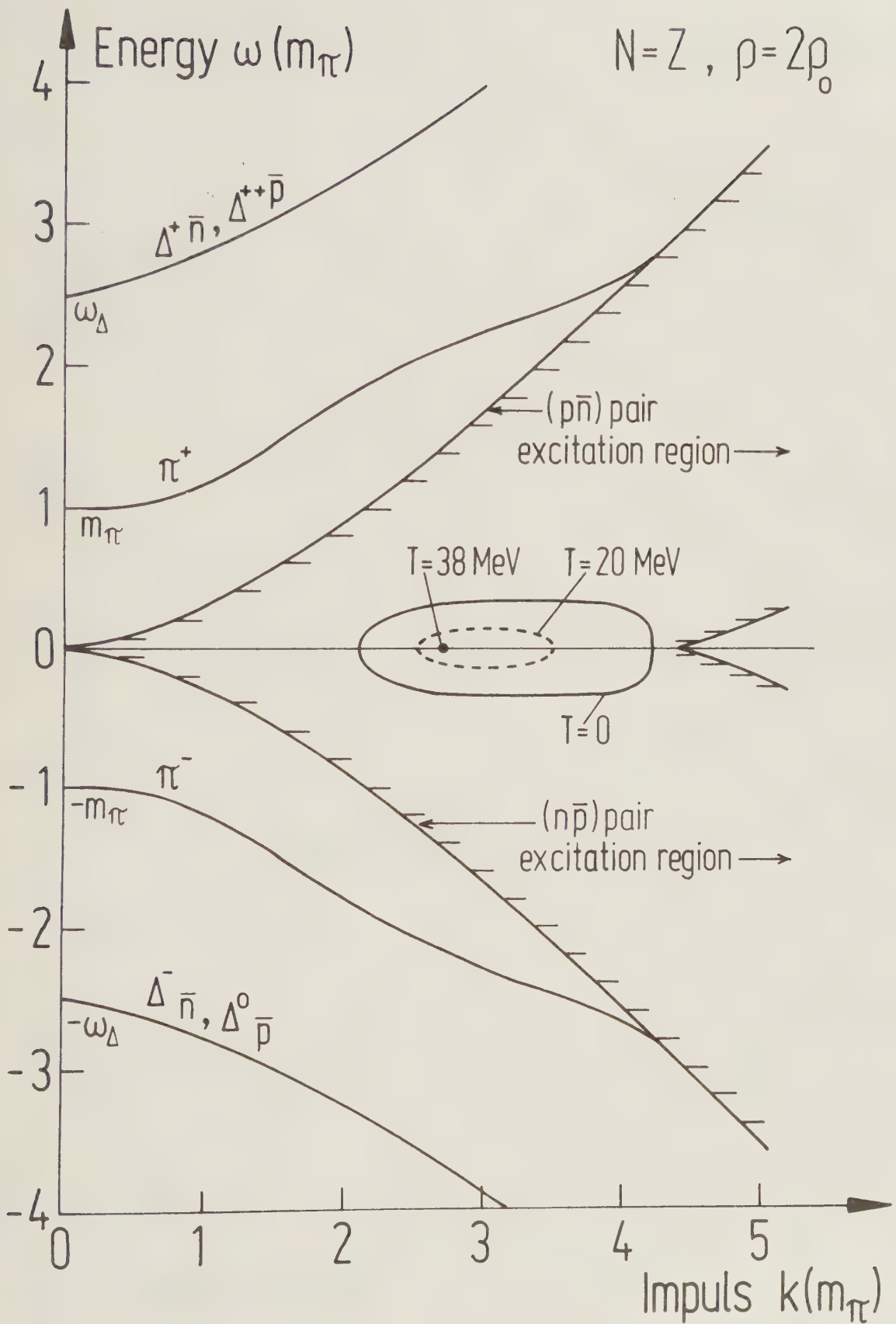


Fig.5

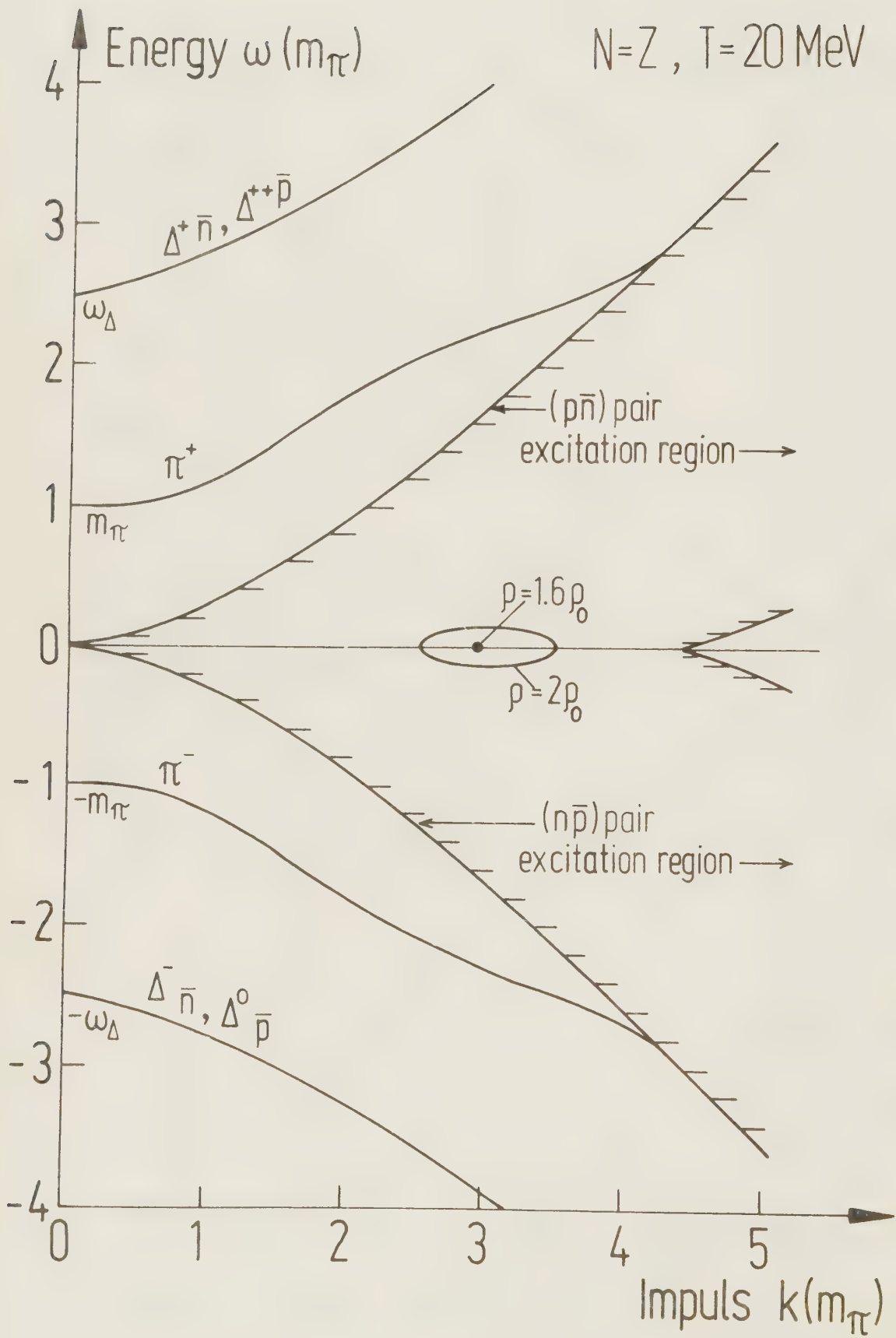


Fig.6

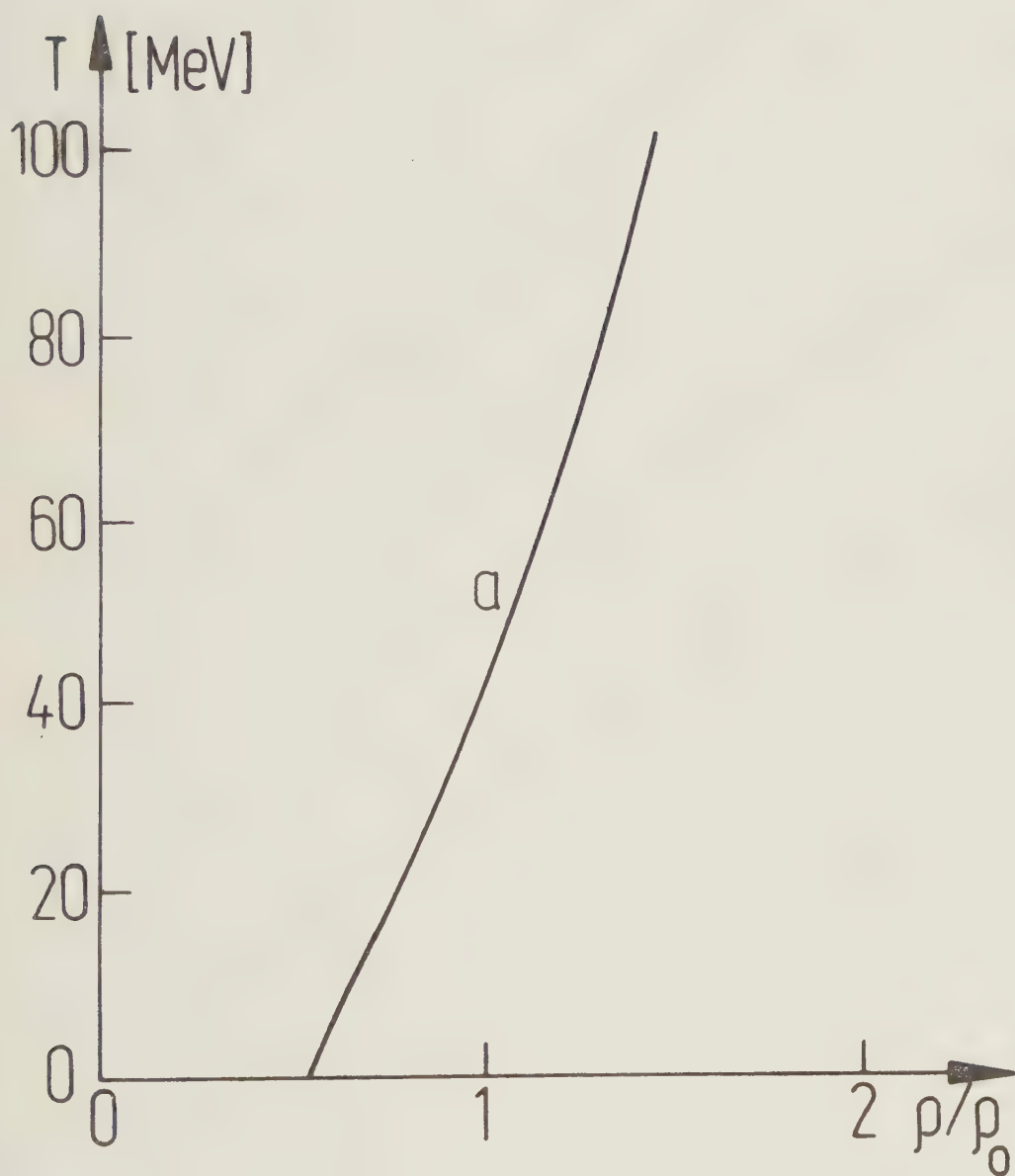


Fig. 7

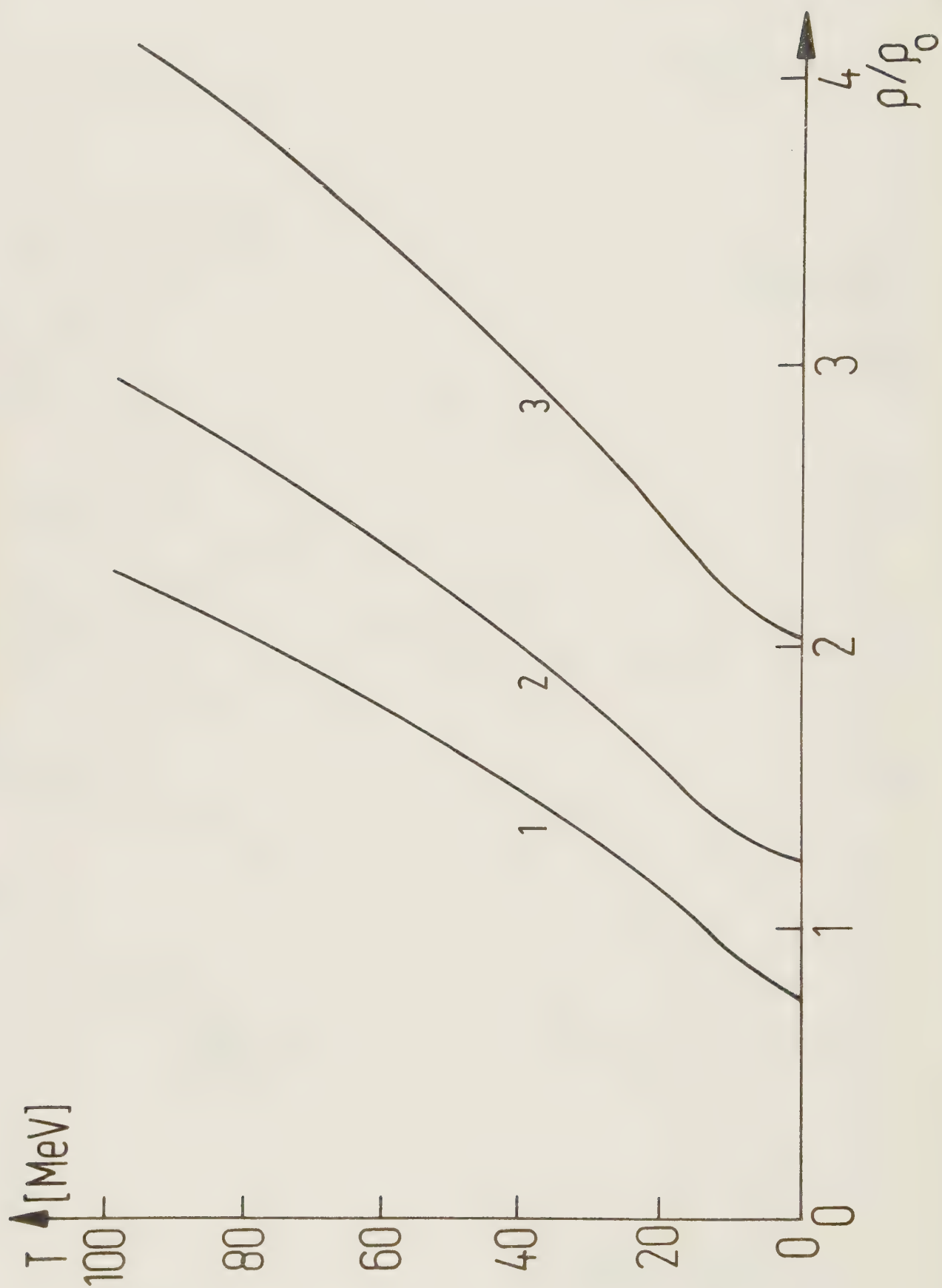


Fig. 8

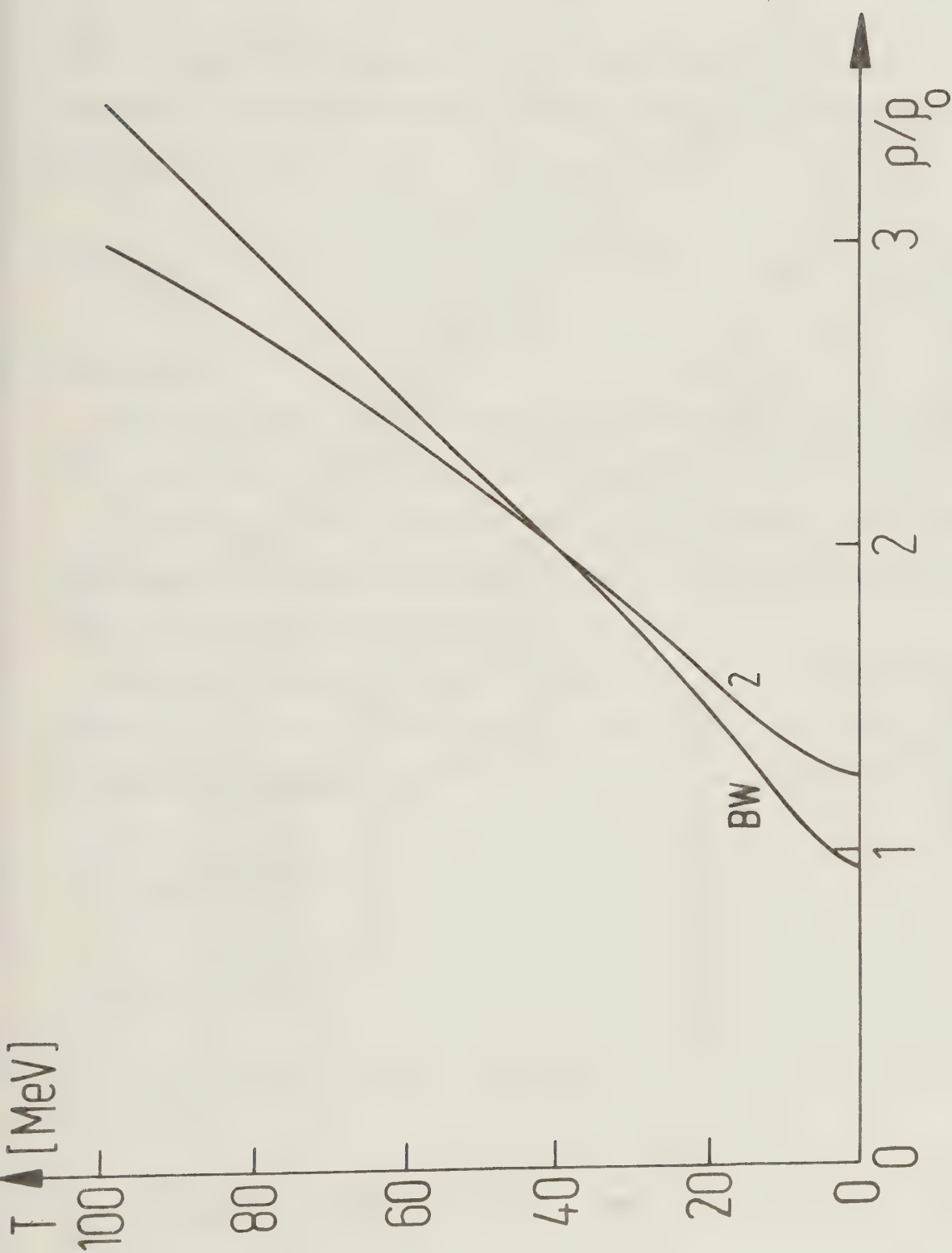


Fig. 9

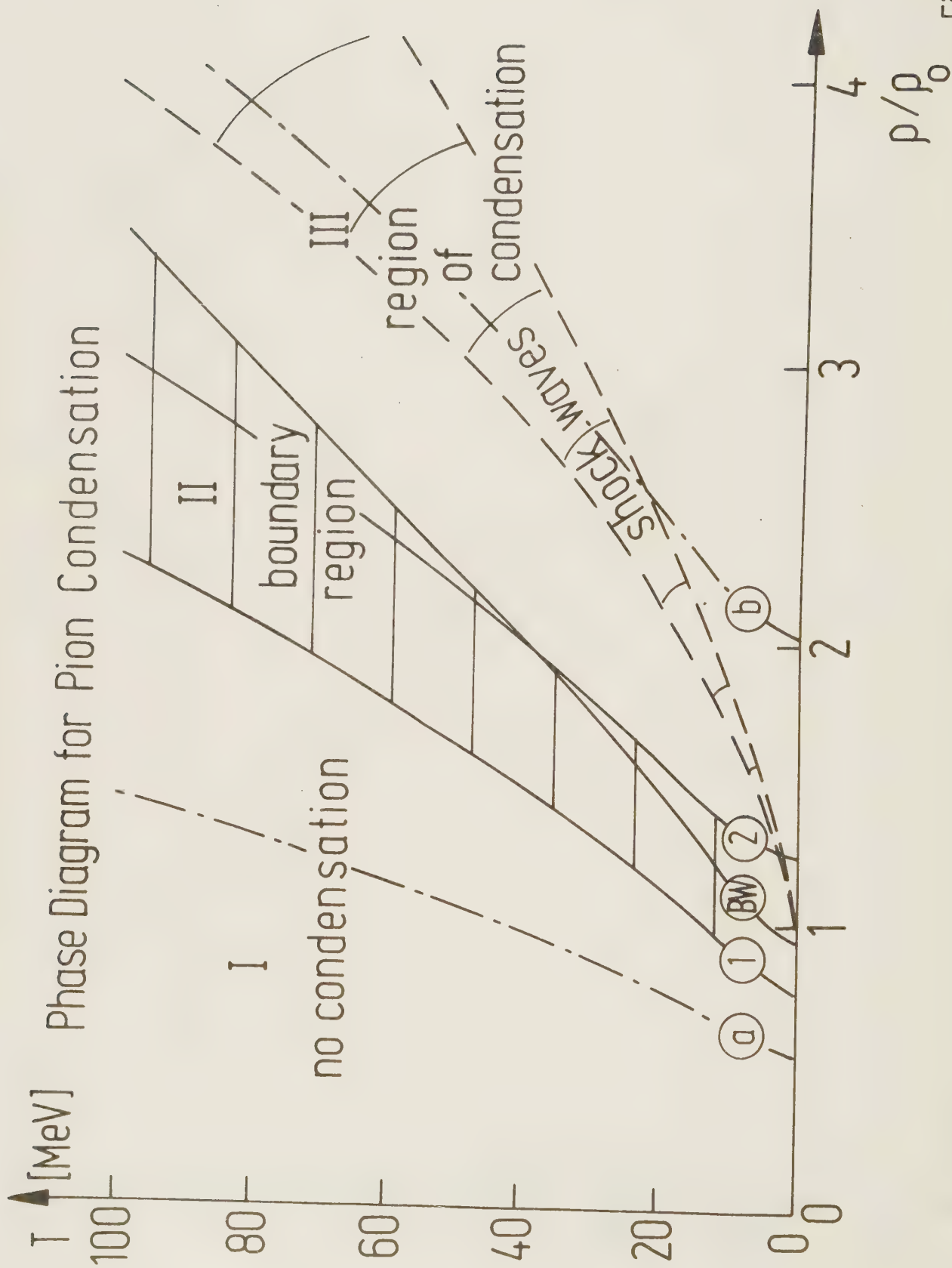


Fig.10

Anhang 1

Die temperaturabhängige Greens-Funktion^{90, 93, 68}

Die temperaturabhängige Greens-Funktion wird aus der zeitabhängigen Einteilchen-Greens-Funktion für N Teilchen mit der Energie E_n

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t', N, E_n) = -i \langle E_n, N | T_t (\psi(\vec{x}, t) \psi^\dagger(\vec{x}', t')) | E_n, N \rangle \quad (A_1.1)$$

entwickelt.

Für eine Temperatur T kommen die N Teilchen mit der Energie E_n mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $e^{(\Omega - \hat{H} + \mu \hat{N})/T}$ vor (grosskanonische Gesamtheit). Ω ist das thermodynamische Potential, $\hat{H}$ der Hamilton-Operator, μ das chemische Potential und $\hat{N}$ der Teilchenzahl-Operator.

Die zeitabhängige Greens-Funktion für die Temperatur T ist der Mittelwert der Greens-Funktion bei $T = 0$, gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit $e^{(\Omega - \hat{H} + \mu \hat{N})/T}$:

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t, \vec{x}', t', T, \mu) &= \\ &= \sum_{E_n, N} e^{(\Omega - \hat{H} + \mu \hat{N})/T} G(\vec{x}, t, \vec{x}', t', E_n, N) = \\ &= -i S_P \left\{ e^{(\Omega - \hat{H} + \mu \hat{N})/T} G(\vec{x}, t, \vec{x}', t', E_n, N) \right\} \end{aligned} \quad (A_1.2)$$

Eine Greens-Funktion kann man im Wechselwirkungsbild in eine Störungsreihe entwickeln. Die Form (A₁.2) entspricht aber dieser Forderung nicht. Deshalb ist das Wick'sche Theorem nicht anwendbar.

Zur Umgehung dieser Schwierigkeit hat Matsubara⁹⁴ eine Technik entwickelt, die eine diagrammatische Darstellung zulässt. Diese Technik erfordert eine analytische Fortsetzung der Greens-Funktion (A₁.2) mit komplexer Zeit:

$$t \longrightarrow it = \frac{1}{T} = \tau \quad (\text{A}_1.3)$$

Man definiert

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \tau, \vec{x}', \tau', T, \mu) \equiv G(\vec{x}, it, \vec{x}', it', T, \mu) \quad (\text{A}_1.4)$$

Es gilt:^{90, 93}

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\vec{x}, \tau, \vec{x}', \tau', T, \mu) = \\ = -\text{Sp} \left\{ e^{(\Omega + \mu \hat{N} - \hat{H})T} e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau - \tau')} \psi(\vec{x}) e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau - \tau')} \psi^\dagger(\vec{x}') \right\} \end{aligned} \quad (\text{A}_1.5)$$

für $\tau < \tau'$

$$\begin{aligned} = \pm \text{Sp} \left\{ e^{(\Omega + \mu \hat{N} - \hat{H})T} e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau - \tau')} \psi^\dagger(\vec{x}') e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau - \tau')} \psi(\vec{x}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A}_1.6)$$

für $\tau > \tau'$

Das + gilt für Fermionen, das - für Bosonen.

Aus (A₁.5), (A₁.6) folgt die Darstellung der Feldoperatoren in einem von der "Zeit" τ abhängigen, modifizierten Wechselwirkungsbild:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\vec{x}, \tau) &= e^{(\hat{H} - \mu \hat{N})\tau} \psi(\vec{x}) e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})\tau} \\ \tilde{\psi}^+(\vec{x}, \tau) &= e^{(\hat{H} - \mu \hat{N})\tau} \psi^+(\vec{x}) e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})\tau}\end{aligned}\tag{A₁.7}$$

und

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \tau, \vec{x}', \tau', T, \mu) \equiv -\langle T_{\tau}(\tilde{\psi}(\vec{x}, \tau) \tilde{\psi}^+(\vec{x}', \tau')) \rangle \tag{A₁.8}$$

wobei T_{τ} der Zeitordnungsoperator nach der "Zeit" τ ist.

Da die temperaturabhängige Greens-Funktion $\mathcal{G}$ nur eine Funktion der "Zeit"-Differenz $\tau - \tau' = \tau''$ ist, ist sie als solche im Intervall $-1/T$ bis $1/T$ definiert. In diesem Bereich ist die Greens-Funktion periodisch:

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau - \tau' < 0) = \pm \mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau - \tau' + 1/T) \tag{A₁.9}$$

Der Beweis folgt aus:

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau - \tau' = \tau'' < 0) =$$

$$= \pm \text{Sp} \left\{ e^{\Omega/\tau} e^{(\mu \hat{N} - \hat{H})/\tau} e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})\tau''} \psi_{(\vec{x}')}^+ e^{(\hat{H} - \mu \hat{N})\tau''} \psi_{(\vec{x})} \right\}$$

mit $\text{Sp}(ABC) = \text{Sp}(CAB)$

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau - \tau' = \tau'' < 0) =$$

$$= \pm \text{Sp} \left\{ e^{\Omega/\tau} e^{(\hat{H} - \mu \hat{N})\tau''} \psi_{(\vec{x})} e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(1/\tau + \tau'')} \psi_{(\vec{x}')}^+ \right\} =$$

$$= \pm \text{Sp} \left\{ e^{(\Omega + \mu \hat{N} - \hat{H})/\tau} e^{(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau'' + 1/\tau)} \psi_{(\vec{x})} e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau'' + 1/\tau)} \psi_{(\vec{x}')}^+ \right\} = \quad (\text{A}_1.10)$$

$$= \mp \mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau - \tau' + 1/\tau)$$

Die Periodizität tritt wegen der spezifischen Form des statistischen Operators $e^{(\Omega + \mu \hat{N} - \hat{H})/\tau}$ der makroskopischen Gesamtheit auf.

Für die in (A₁.8) definierte Greens-Funktion im modifizierten (τ -abhängigen) Wechselwirkungsbild erhält man ein verallgemeinertes Wick'sches Theorem. Dieses Theorem ermöglicht uns, die verschiedenen Näherungen der Störungsreihe der Greens-Funktion mit Hilfe von Feynman Graphen derselben Form wie bei

$T = 0$ zu beschreiben, mit dem Unterschied, dass andere analytische Ausdrücke den einzelnen Elementen der Graphen zugeordnet werden und die Integration nicht über t von $-\infty$ bis $+\infty$ sondern über τ von 0 bis $1/T$ ausgeführt wird.

Für die Berechnung der Feynman Diagramme verwendet man die Greens-Funktion im Impulsraum. Die temperaturabhängige Greens - Funktion wird in eine Fourierreihe entwickelt, da die Periodizität von $\mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau'')$ dies ermöglicht:

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau'') = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau''} \mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \omega_n) \quad (\text{A}_1.11)$$

mit

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-1/T}^{1/T} e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau) d\tau \quad (\text{A}_1.12)$$

und $\omega_n = n \pi T$.

So gilt dann auch

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau'' + 1/T) = T \sum_n e^{-i\omega_n (\tau'' + 1/T)} \mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \omega_n) \quad (\text{A}_1.13)$$

Aus dem Vergleich der rechten Seiten von $(\text{A}_1.11)$ und $(\text{A}_1.13)$ ergibt sich $e^{-i\omega_n 1/T} = 1$ woraus folgt

$$\omega_n = \begin{cases} 2n\pi T & \text{für Bosonen} \\ (2n+1)\pi T & \text{für Fermionen} \end{cases} \quad (\text{A}_1.14)$$

Das heisst, die Störungsreihe (A₁.11) ist im Impulsraum

$$\mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}', \tau'') = T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \sum_n e^{i\omega_n \tau''} \mathcal{G}(\vec{k}, \omega_n) \quad (\text{A}_1.15)$$

Für die Greens-Funktionen (A₁.15) kann man nun die Feynman - Regeln anwenden, jedoch mit dem Unterschied, dass jetzt jedes Integral über die Energie ω durch eine Summe über die diskreten Werte von ω_n ersetzt wird

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega \longrightarrow T \sum_n \omega_n \quad (\text{A}_1.16)$$

Bei der Auswertung der Feynman-Diagramme muss jedoch beachtet werden, dass:

1. die Rechnungen mit den analytisch fortgesetzten Greens - Funktionen ausgeführt werden,
2. das Resultat zurücktransformiert wird, wobei $i\omega_n$ durch ω ersetzt wird.

Für den Impulsraum ergeben die Rechnungen⁹⁰

$$\mathcal{G}(\vec{p}, \omega_n, T, \mu) = \frac{1}{i\omega_n - p^2/2m + \mu} = \frac{1}{i\omega_n - \epsilon_0(\vec{p}) + \mu} \quad (\text{A}_1.17)$$

wobei ω_n den Wert (A₁.14) erhält.

Anhang 2

Feynman Regeln in der Feldtheorie bei endlichen Temperaturen⁹⁵

Die allgemeinen Regeln für die Auswertung von Feynman Graphen sind:

1. Man ordnet Impulse und Frequenzen den Linien eines Graphen derart zu, dass die äusseren Linien den äusseren Impulsen und Frequenzen entsprechen und die Impulse und Frequenzen der inneren Linien den Erhaltungssätzen $\sum \vec{p} = 0$, $\sum \omega_n = 0$ genügen.

Die Frequenzen von Bosonlinien sind immer gerade ($\omega_n = 2n\pi T$), während die von Fermionlinien ungerade sind ($\omega_n = (2n+1)\pi T$) (A₁.14).

2. Man integriert bzw. summiert über die unabhängigen Impulse bzw. Frequenzen.
3. Jeder inneren Fermionlinie ordnet man die Grösse

$$\mathcal{U}(\vec{p}, \varepsilon_n) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_o(\vec{p}) + \mu} \quad (\text{A}_2.1)$$

zu, den beiden äusseren Fermionlinien die Grösse

$$\mathcal{G}(\vec{p}, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{[i\varepsilon_n - \varepsilon_o(\vec{p}) + \mu]^2} \quad (\text{A}_2.2)$$

wobei α, β die Spin-Indizes darstellen.

4. Jeder Bosonlinie ordnet man eine Grösse

$$\mathcal{D}(\vec{k}, \omega_n) = - \frac{\omega_o^2(\vec{k})}{\omega_n^2 + \omega_o^2(\vec{k})} \quad (\text{A}_2.3)$$

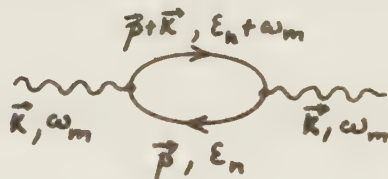
zu.

5. Das Ergebnis multipliziert man mit:

$$g^{2n} \frac{T^n}{(2\pi)^{3n}} (-1)^n (2s+1)^F (\mp)^F \quad (\text{A}_2.4)$$

wobei g die Kopplungskonstante, s der Spin der Teilchen, F die Anzahl der geschlossenen Fermionringe und $2n$ die Anzahl der Vertizes bedeuten.

Die Korrektur zweiter Ordnung zur Pionen-Greens-Funktion



$$(\text{A}_2.5)$$

entspricht z.B. dem folgenden Ausdruck:

$$g^{2n} \frac{T^n}{(2\pi)^{3n}} (-1)^n (2s+1)^F (\mp)^F \left[\frac{\omega_o^2(\vec{k})}{\omega_n^2 + \omega_o^2(\vec{k})} \right]^2 \cdot \quad (\text{A}_2.6)$$

$$\cdot \sum_{\epsilon_n, \omega_m} \int d^3p \mathcal{U}(\vec{p}, \epsilon_n) \mathcal{U}(\vec{p} + \vec{k}, \epsilon_n + \omega_m)$$

wobei $S = 1/2$, $F = 1$, $n = 1$, $\varepsilon_n = (2n+1) \pi T$

und $\omega_m = 2m \pi T$.

Also gilt für (A₂.6)

$$\pm 2g^2 T \left[\frac{\omega_o^2(\vec{k})}{\omega_n^2 + \omega_o^2(\vec{k})} \right]^2 \sum_{\varepsilon_n, \omega_m} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_o(\vec{p}) + i\mu} \frac{1}{i(\varepsilon_n + \omega_m) - \varepsilon_o(\vec{p} + \vec{k}) + i\mu} \quad (\text{A}_2.7)$$

Anhang 3a

Berechnung der Funktion $\phi(k, \omega)$

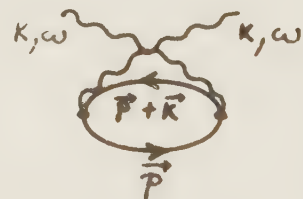
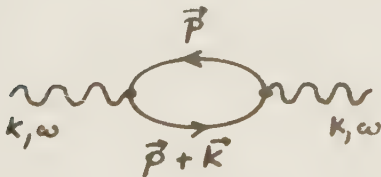
(Gl. 4.33, 4.34, 4.35, 4.37)

Wir berechnen das Integral über die Greens-Funktion in Gl. (4.32). $G(\vec{p}, \varepsilon)$ ist⁹⁰:

$$G(\vec{p}, \varepsilon) = \frac{a}{\varepsilon - \varepsilon(\vec{p}) - \mu + i\delta \operatorname{sign}(|\vec{p}| - p_F)} \quad (\text{A}_3.1)$$

wobei $a \approx 1$, ε die Energie des Nukleons, $\varepsilon(\vec{p}) = p^2/2m$, μ das chemische Potential $\mu = p_F^2/2m$, δ eine beliebig kleine Zahl und $\operatorname{sign}(|\vec{p}| - p_F) = \begin{cases} + & \text{wenn } |\vec{p}| > p_F \\ - & \text{wenn } |\vec{p}| < p_F \end{cases}$ sind.

In Gl. (4.30) sind zwei Möglichkeiten der graphischen Darstellung von $\Pi_p(k, \omega)$ proportional zu $\phi(k, \omega)$ (Gl. 4.35), gegeben, die wir parallel behandeln:



Die quasi-Teilchen (Loch) müssen sich unter- und oberhalb des p_F befinden.

Wir haben

$|\vec{p}| < p_F$ (Loch); $\operatorname{sign}(|\vec{p}| - p_F) < 0$
d.h. $-i\delta \rightarrow$ ein Pol in der
oberen Halbebene in der

$|\vec{p}| > p_F$ (Teilchen); $\operatorname{sign}(|\vec{p}| - p_F) > 0$
d.h. $+i\delta \rightarrow$ ein Pol in der
unteren Halbebene in der

Nähe von $\varepsilon = \varepsilon(\vec{p}) + \mu + i\delta$

Nähe von $\varepsilon = \varepsilon(\vec{p}) + \mu - i\delta$

und

$|\vec{p} + \vec{k}| > p_F$ (Teilchen);

$\text{sign}(|\vec{p} + \vec{k}| - p_F) > 0$

d.h. $+i\delta \rightarrow$ ein Pol in der unteren Halbebene in der

Nähe von $\varepsilon = -\omega + \varepsilon(\vec{p}) + \mu - i\delta$

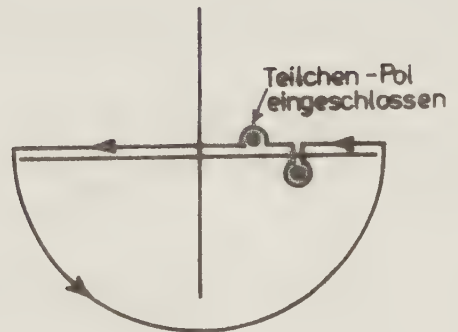
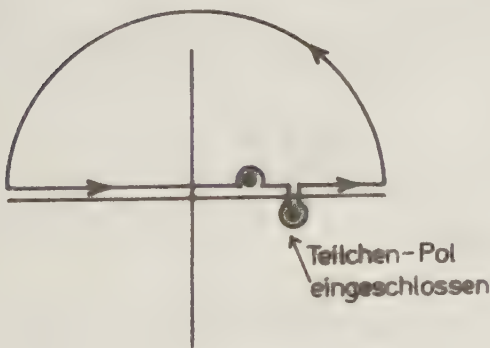
$|\vec{p} + \vec{k}| < p_F$ (Loch);

$\text{sign}(|\vec{p} + \vec{k}| - p_F) < 0$

d.h. $-i\delta$ ein Pol in der oberen Halbebene in der

Nähe von $\varepsilon = -\omega + \varepsilon(\vec{p}) + \mu + i\delta$

Graphisch



Das Integral lautet:

$$\int \frac{a}{\varepsilon - \varepsilon(\vec{p}) - \mu - i\delta} \frac{a}{\varepsilon + \omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) - \mu + i\delta} d\varepsilon$$

$$\int \frac{a}{\varepsilon - \varepsilon(\vec{p}) - \mu + i\delta} \frac{a}{\varepsilon + \omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) - \mu - i\delta} d\varepsilon$$

Der Integrand hat die Form $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ wobei

$$g(z) = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon(\vec{p}) - \mu - i\delta}$$

$$g(z) = \frac{1}{\varepsilon + \omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) - \mu - i\delta}$$

$$h(z) = \varepsilon + \omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) - \mu + i\delta$$

$$h(z) = \varepsilon - \varepsilon(\vec{p}) - \mu + i\delta$$

$h(z)$ besitzt eine einfache Nullstelle in α

$$\alpha = -\omega + \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \mu$$

$$\alpha = \varepsilon(\vec{p}) + \mu$$

Das Residuum ist $a_{-1} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$

$$a_{-1} = \frac{-1}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})}$$

Nach dem Satz von Cauchy folgt:

$$\int G(\vec{p}, \varepsilon) G(\vec{p} + \vec{k}, \varepsilon + \omega) d\varepsilon =$$

$$\int G(\vec{p}, \varepsilon) G(\vec{p} + \vec{k}, \varepsilon + \omega) d\varepsilon =$$

$$= \frac{-2\pi i a^2}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} =$$

$$= \frac{2\pi i a^2}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} =$$

Mit der Bezeichnung

$$n(\vec{p}) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\vec{p}| < p_F \\ 0 & \text{für } |\vec{p}| > p_F \end{cases}$$

und $a \approx 1$ erhalten wir

$$= 2\pi i \frac{n(\vec{p})}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})}$$

$$= 2\pi i \frac{-n(\vec{p} + \vec{k})}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \quad (A_3.2)$$

Vergleiche mit Gl. (4.13).

Fassen wir die zwei Terme zusammen (Gl. 4.30)

$$\int G(\vec{p}, \varepsilon) G(\vec{p} + \vec{k}, \varepsilon + \omega) d\varepsilon = 2\pi i \frac{n(\vec{p}) - n(\vec{p} + \vec{k})}{\omega - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \quad (A_3.3)$$

so erhalten wir Gl. (4.34-35).

Die Integration von $\phi_1(k, \omega)$ für den direkten Graphen werden wir im folgenden ausführen. Die Integration für den Kreuz - term ist ähnlich.

Wir haben das Integral Gl. (4.34):

$$\phi(k, \omega) = - \frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int \frac{n(\vec{p}) - n(\vec{p} + \vec{k})}{\omega - \epsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \epsilon(\vec{p})} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (A_{3.4})$$

Im Falle des direkten Prozesses gilt $n(\vec{p}) = 1$ ($\vec{p} < p_F$),
 $n(\vec{p} + \vec{k}) = 0$.

$\epsilon(\vec{p}) = p^2/2m^*$ und $d^3 p = p^2 dp \sin \theta d\theta d\varphi = -p^2 dp 2\pi d(\cos \theta)$.

Setzen wir diese Werte in (A_{3.4}) ein, so folgt:

$$\phi_1(k, \omega) = \frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int \frac{1}{\omega - \frac{k^2}{2m^*} - \frac{pk}{m^*} \cos \theta} \frac{p^2 dp d(\cos \theta)}{(2\pi)^2} \quad (A_{3.5})$$

Mit der Variablen-Transformation $\cos \theta = x$ und mit der elementaren Integration:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) \quad (A_{3.6})$$

erhält man

$$\phi_1(k, \omega) = \frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int_0^{p_F} \frac{p^2 dp}{(2\pi)^2} \left[-\frac{m^*}{pk} \ln \left(\omega - \frac{k^2}{2m^*} - \frac{pk}{m^*} x \right) \right]_1^{-1} = \quad (A_{3.7})$$

$$= \frac{1}{2 p_F k} \int_0^{p_F} p dp \ln \left(\frac{\omega - k^2/2m^* - pk/m^*}{\omega - k^2/2m^* + pk/m^*} \right)$$

Wir teilen das Integral in zwei Teile. Mit der Formel¹⁰³:

$$\int x \ln(a+bx) dx = \frac{1}{2} \left[x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right] \ln(a+bx) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{b} \right] \quad (\text{A}_3.8)$$

erhalten wir schliesslich Gl. (4.37)

$$\phi_1(k, \omega) = \frac{m^{*2}}{2p_F k^3} \left(\frac{a^2 - b^2}{2} \ln \frac{a+b}{a-b} - ab \right) \quad (\text{A}_3.9)$$

wobei $a = \omega - k^2/2m^*$ und $b = p_F k / m^*$.

Anhang 3b

Berechnung der Funktion $\phi(k, \omega, T)$

(Gl. 4.45 - 4.48)

Die analytische Form der graphischen Gleichung (4.41), d.h. die Gl. (4.45), enthält die Funktion $\phi(k, \omega, T)$ in der Form eines Impulsintegrals:

$$\phi(k, \omega_m, p_F, T) = -\frac{2\pi^2}{m^* p_F} T \sum_{\varepsilon_n} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \mathcal{Y}(\vec{p}, \varepsilon_n) \mathcal{Y}(\vec{p} + \vec{k}, \varepsilon_n + \omega_m) \quad (A_3.10)$$

$\mathcal{Y}(\vec{p}, \varepsilon_n) = \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon(\vec{p}) + \mu}$ ist die Temperatur-Greens-Funktion (A₁.17), $\varepsilon_n = (2n+1)\pi T$ und $\omega_m = 2m\pi T$ (siehe A₁.14).

Setzen wir diese Werte ein, so gilt:

$$\begin{aligned} \phi(k, \omega_m, p_F, T) &= \\ &= -\frac{2\pi^2}{m^* p_F} T \sum_{\varepsilon_n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon(\vec{p}) + \mu} \frac{1}{i(\varepsilon_n + \omega_m) - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \mu} = \\ &= -\frac{2\pi^2}{m^* p_F} T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \sum_{\varepsilon_n} \left(\frac{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})}{(i\varepsilon_n - \varepsilon(\vec{p}) + \mu)(i\varepsilon_n + \omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \mu)} \right) \quad (A_3.11) \\ &= -\frac{2\pi^2}{m^* p_F} T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \sum_{\varepsilon_n} \left(\frac{1}{i(2n+1)\pi T - \varepsilon(\vec{p}) + \mu} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i[(2n+1)\pi T + 2m\pi T] - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \mu} \right) \end{aligned}$$

Nach Einführung eines Konvergenzfaktors $e^{i\varepsilon_n \tau}$ (ε beliebig klein) können wir die Identität⁶⁸

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_n \frac{e^{i(2n+1)\pi\tau}}{i(2n+1)\pi\tau + \chi} = \frac{1/\tau}{e^{\chi/\tau} + 1} \quad (\text{A}_3.12)$$

verwenden und erhalten (bemerkend, dass $e^{i2m\pi\tau} = 1$)

die Form

$$\begin{aligned} \Phi(k, \omega, p_F, T) = & -\frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \left\{ \frac{1}{e^{(\varepsilon(\vec{p}) - \mu)/\tau} + 1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{e^{(\varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) - \mu)/\tau} + 1} \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \end{aligned} \quad (\text{A}_3.13)$$

oder in der bekannten Form der Lindhard Funktion:

$$\Phi(k, \omega, p_F, T) = -\frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n(\vec{p}, T) - n(\vec{p} + \vec{k}, T)}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \quad (\text{A}_3.14)$$

Als Beispiel integrieren wir $\Phi_1(k, \omega, p_F, T)$ für den direkten Graphen (Gl. 4.42):

$$\Phi_1(k, \omega, p_F, T) = -\frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n^n(\vec{p}, T)}{i\omega_m - \varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{p})} \quad (\text{A}_3.15)$$

Mit $d^3 p = p^2 dp \sin \theta d\theta d\varphi = -2\pi p^2 dp d(\cos \theta)$ gilt

$$\Phi_1(k, \omega, p_F, T) = \frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int_0^\infty p^2 dp n^n(\vec{p}, T) \int_0^\pi \frac{d(\cos \theta)}{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} - \frac{pk}{m^*} \cos \theta} \quad (\text{A}_3.16)$$

Wir führen die Variablen-Transformation $x = \cos \theta$ durch

$$\Phi_1(k, \omega, p_F, T) = \frac{2\pi^2}{m^* p_F} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(2\pi)^2} n(\vec{p}, T) \int_{-1}^1 \frac{dx}{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} - \frac{pk}{m^*} x} =$$

und verwenden (A_{3.6})

$$= \frac{1}{2p_F k} \int_0^\infty p dp \frac{1}{e^{(\varepsilon(\vec{p}) - \mu)/T} + 1} \ln \left(\frac{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} - \frac{pk}{m^*}}{i\omega_m - \frac{k^2}{2m^*} + \frac{pk}{m^*}} \right) \quad (\text{A}_{3.17})$$

Für den Grenzwert $T \rightarrow 0$, hat man

$$i\omega_m \rightarrow \omega$$

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon(\vec{p}) - \mu)/T} + 1} \rightarrow 1$$

$$\int_0^\infty dp \rightarrow \int_0^{p_F} dp$$

Somit folgt das Zwischenergebnis

$$\Phi_1(k, \omega, T \rightarrow 0) = \frac{1}{2p_F k} \int_0^{p_F} p dp \ln \left(\frac{\omega - \frac{k^2}{2m^*} - \frac{pk}{m^*}}{\omega - \frac{k^2}{2m^*} + \frac{pk}{m^*}} \right) \quad (\text{A}_{3.18})$$

das identisch mit $\phi(k, \omega)$ ist, das wir für $T = 0$ berechnet haben (Gl. (A_{3.7})).

Anhang 4a

Die Grundlage von Landau's Fermi-Flüssigkeitstheorie

Die Theorie der Fermi-Flüssigkeit wurde von Landau^{96, 97} aufgestellt und von Migdal⁹⁸, Abrikosov und Dzyaloshinskii⁹⁹ sowie anderen fortgesetzt. Sie ist die Grundlage für die Beschreibung der Eigenschaften von ^3He , der Supraflüssigkeit und supraleitenden Metallen, den ferromagnetischen Fermi Systemen, der Elektronen in Metallen und Plasma.

Landau hat seine Theorie auf zwei Annahmen begründet:

- a) Die Anregungen einer Fermi Flüssigkeit haben eine ähnliche Struktur wie ein ideales Fermigas.
- b) Die Anregungen wechselwirken miteinander. Diese Wechselwirkung kann durch ein selbst-konsistentes Feld, das auf die "Quasi-Teilchen" wirkt und durch die benachbarten "Quasi-Teilchen" erzeugt wird, beschrieben werden.

Aus der ersten Annahme folgt, dass man einen angeregten Zustand einer Fermi Flüssigkeit durch elementare Anregungen mit Spin $1/2$ und Impuls p in der Gegend der Fermi Kante p_F ($p > p_F$ - Quasi-Teilchen, $p < p_F$ - Quasi-Loch) beschreiben kann. Also kommen diese Teilchen-Loch Anregungen nur in Paaren vor. Da zwei Fermionen zu den Quantenzahlen eines Bosons koppeln können, kann das Anregungsspektrum der Fermi Flüssigkeit ein Bose Spektrum sein. Die kollektiven Anregungen können als gebundene Teilchen-Loch Zustände gedeutet werden, z.B.

Schall-Wellen, Spin-Wellen, Cooper-Paare usw.

Aus der ersten Annahme geht noch eine andere hervor, nämlich dass der Fermi Impuls p_F zu der Dichte N/V der Flüssigkeit die gleiche Beziehung hat wie im Falle des idealen Fermi Gases:

$$p_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} \quad (A_4.1)$$

Gl. (A₄.1) ist wiederum eine wichtige Hypothese. Man kann zeigen, dass sie theoretisch mit Hilfe von Greens-Funktionen mikroskopisch abgeleitet werden kann⁹⁰.

Was die Wechselwirkung der Quasi-Teilchen anbetrifft (Annahme b), stellt es sich heraus, dass die Energie des Systems nicht die einfache Summe der Quasiteilchen-Energie ist, sondern ein Funktional ihrer Distribution $n(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/T} + 1}$. Die Änderung der Energie des Systems, wenn die Dichte der Quasi-Teilchen verändert wird, ist dann⁹⁶

$$\delta E = Sp \int \epsilon \delta n \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (A_4.2)$$

woraus die Energie ϵ der Quasi-Teilchen definiert wird, d.h. ϵ selbst hängt von der Temperatur ab.

Für kleine Temperaturen gilt⁹⁰:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\vec{p}, T) = \epsilon_{\alpha\beta}^{\circ}(\vec{p}) + \int f_{\alpha\beta, \gamma\delta}(\vec{p}, \vec{p}') \delta n_{\gamma\delta}(\vec{p}') \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \quad (A_4.3)$$

ε ist die Energie der Quasiteilchen bei $T = 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind Spin Indizes. δn ist die Änderung der Dichte der Quasiteilchen mit bestimmtem Impuls und Spin.

Die Funktion f ist eine wichtige Charakteristik der Fermi Flüssigkeit. Sie hängt mit der Streuamplitude zweier Quasiteilchen in der Vorwärtsrichtung $\int^\omega$ zusammen und kennzeichnet die effektive lokale Wechselwirkung der Quasiteilchen. Im Falle der Kernmaterie ist f von Impuls, Spin und Isospin der Quasiteilchen abhängig.

Setzt man den Betrag der Impulse der Quasiteilchen gleich ($p_1, p_2 \simeq p_F$), so hängt die Funktion f nur noch von dem Winkel, nicht aber vom Wert der Impulse ab. Es gilt¹⁰⁰:

$$f(\vec{p}_1, \vec{\sigma}_1, \vec{p}_2, \vec{\sigma}_2) = \frac{\pi^2}{m_F^*} \left(f^0 + f^1 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + g^0 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + g^1 (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \right) \quad (A_4.4)$$

wobei $\vec{\sigma}, \vec{\tau}$ die Spin und Isospin-Matrizen sind. Die Grössen f^0, f^1, g^0, g^1 werden durch den Vergleich der Theorie mit Experimenten bestimmt (z.B. Grössen wie magnetisches Dipolmoment, elektrisches Quadrupolmoment, Symmetrieenergie, Isotopenverschiebung usw.). f^0 kann aus der Schallgeschwindigkeit, f^1 aus der spezifischen Wärme gewonnen werden.

Ausser diesen Grössen spielt noch eine phänomenologische Konstante – die effektive Masse der Quasiteilchen m^* – in der Theorie eine wichtige Rolle. Sie wird formal durch die Forderung eingeführt, dass die Quasiteilchen dieselbe Impuls-

abhängigkeit haben wie die normalen Teilchen: $\mathcal{E} = \vec{p}^2 / 2m^*$. m^* wird experimentell bestimmt; (eine mögliche Methode ist, m^* aus den experimentellen Daten der spezifischen Wärme auszuwerten). Im Falle der Kernmaterie ist die Differenz von m^* zu der reellen Nukleonen Masse höchstens 10 - 20%. Zwischen der effektiven Masse der Quasi-Teilchen m^* und der Funktion f , die die Wechselwirkung der Quasi-Teilchen beschreibt, besteht ein enger Zusammenhang, da die effektive Masse die Quasi-Teilchen Wechselwirkung wiedergibt.

Die Grundsätze der Theorie der Fermi Flüssigkeit können aus mikroskopischen Betrachtungen eines beliebigen kurzreichweitig wechselwirkenden Fermi Systems hergeleitet werden: die Eigenschaften des Vertex-Anteils Γ , der Zusammenhang zwischen m^* , f und Γ^ω , zwischen Fermi-Impuls und Teilchen - Zahl, der Bose-Zweig der Fermi Flüssigkeit u.a. (siehe Kapitel VI der Ref. 90).

Anhang 4b

Der Vertex-Anteil (Streuamplitude) Γ der Quasi-Teilchen im Fermi System

Der Vertex-Anteil (Streuamplitude) Γ der Quasi-Teilchen in einem Fermi System ist durch die Summe aller Wechselwirkungsgraphen, die mit Quasi-Teilchen beginnen und enden, definiert.

Γ enthält die ein- und austretenden Linien der Graphen nicht.

Ein exakter Vertex $\mathcal{T}$ ist durch die Summe der Graphen, die Γ enthalten,

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \dots \\
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7}
 \end{aligned}
 \tag{A_4.5}$$

gegeben. Der erste Term in (A₄.5) ist der Vakuum-Vertex $\mathcal{T}^0$.

Der im zweiten Term eingeschaltete Γ -Graph ist der Vertex-Anteil der Wechselwirkung der Quasi-Teilchen im System.

In niedrigster Ordnung beschreibt der Vertex-Anteil Γ den Impulsaustausch zwischen zwei Quasi-Teilchen¹⁰¹:

$$\begin{aligned}
 & \text{a)} \quad \text{b)} \quad \text{c)}
 \end{aligned}
 \tag{A_4.6}$$

Diese beinhalten ein Integral über zwei Greens-Funktionen:

$$a) \quad G(q) \cdot G(p_1 + p_2 - q)$$

$$b) \quad G(q) \cdot G(q + p_2 - p_1 - k) \quad (A_4.7)$$

$$c) \quad G(q) \cdot G(q + k)$$

Geht der Energie-Impuls Transfer k in c) gegen Null, nähern sich die Pole der beiden Greens-Funktionen, und es entsteht eine Singularität im Vertex-Anteil Γ . Dadurch unterscheidet sich dieser Fall von a) und b), die keine speziellen Eigenschaften für $k \rightarrow 0$ zeigen.

Um die Funktion Γ zu berechnen, muss man die ganze Störungsreihe aufsummieren. Der Unterschied zwischen den Typen a, b und c in Gl. (A₄.7) ermöglicht die Aufteilung der Graphen. Die Störungsreihe bekommt die Form:

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots (A_4.8)$$

wobei die Vertizes alle Beiträge von a und b enthalten und im weiteren mit Γ' bezeichnet werden. Die Verbindungslinien zwischen den Vertizes stellen den Prozess c dar.

Symbolisch schreibt man¹⁰¹

$$(\Gamma) = (\Gamma') + (\Gamma' : \Gamma') + (\Gamma' : \Gamma' : \Gamma') + \dots$$

oder

$$(\Gamma) = (\Gamma') + (\Gamma' : \Gamma) \quad (A_4.9)$$

wobei der Doppelpunkt für Linien-Paare mit fast gleichem Wert steht.

Definiert man

$$\Gamma(p_1, p_2, p_1 + k, p_2 - k) \equiv \Gamma(p_1, p_2; k)$$

so folgt für (A₄.9) eine Integral-Gleichung

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; k) &= \Gamma'_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2) - \\ &- i \int \Gamma'_{\alpha\gamma, \eta\eta}(p_1, q) G(q) G(q+k) \Gamma_{\eta\beta, \delta\delta}(q, p_2; k) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (A_4.10)$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Spin-Indizes sind.

k ist in Γ' Null gesetzt worden, da Γ' dabei nicht singulär wird.

Da in der Fermi Flüssigkeits-Theorie die Teilchen-Loch Anregungen nur in der Gegend der Fermi-Kante p_F existieren kann, ist in Gl. (A₄.10) die Greens-Funktion (A₁.17) in der Nähe des Punktes $\epsilon=0, |q|=p_F$ entwickelt:

$$G(\vec{q}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - v \cdot (|\vec{q}| - p_F) + i \delta \operatorname{sign}(|\vec{q}| - p_F)} \quad (A_4.11)$$

wobei $\delta \rightarrow 0$, $v = p_F/m^*$ und $v \cdot (|\vec{q}| - p_F) = \varepsilon(\vec{q}) - \mu = q^2/2m^* - p_F^2/2m^*$ in der Nähe der Fermikante.

Da die Greens-Funktion einen Pol hat, folgt, dass sich das Integral in Gl. (A₄.10) in zwei Terme teilt: einer stammt vom $\varepsilon=0$, $|\vec{p}| = p_F$ entfernten Bereich (B), der andere aus der Nähe dieses Punktes (A i). Der letztere bestimmt die Singularität der Gl. (A₄.10). Da der Energie-Impuls Übertrag k klein ist (d.h. $q \approx p_F$), kann man den nahen Bereich sehr klein wählen, so dass nur der Integrationsweg um den Pol der Greens-Funktion bedeutend ist. Das Produkt der Greens-Funktionen $G(q) G(q+k)$ kann man dann als Summe zweier Terme schreiben

$$G(q) G(q+k) = A i + B = A^0 \delta \varepsilon + B \quad (A_4.12)$$

wobei A der singuläre Teil (der von den Polen der Greens - Funktion stammt) und B der reguläre Teil ist, (der bedeutend für den weit entfernten Bereich ist).

Setzt man (A₄.12) in (A₄.10) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; k) &= \\ &= \Gamma'_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2) - i \int \Gamma'_{\alpha\zeta, \gamma\eta}(p_1, q) [iA+B] \Gamma_{\zeta\beta, \eta\delta}(q, p_2; k) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (A_4.13)$$

Sei Γ^ω der Grenzwert von Γ für $|\vec{k}|/\omega \rightarrow 0^{90,101}$

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(p_1, p_2) = \Gamma'_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2) - i \int \Gamma'_{\alpha\zeta, \gamma\eta}(p_1, q) B \Gamma_{\zeta\beta, \eta\delta}^\omega(q, p_2) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \quad (A_4.14)$$

Für Gl. (A₄.13) und (A₄.14) gilt die Operatorgleichung (das Produkt bedeutet Integration):

$$\Gamma^\omega = \Gamma' - i \Gamma' B \Gamma^\omega \quad (A_4.15a)$$

$$\Gamma = \Gamma' - i \Gamma' G G \Gamma = \Gamma' - i \Gamma' G G \Gamma \quad (A_4.15b)$$

Aus (A₄.15a) folgt

$$\Gamma^\omega + i \Gamma' B \Gamma^\omega = \Gamma'$$

$$(1 + i \Gamma' B) \Gamma^\omega = \Gamma'$$

also

$$\Gamma^\omega = (1 + i \Gamma' B)^{-1} \Gamma' \quad (A_4.16)$$

Stellt man Gl. (A₄.15b) um und multipliziert mit $(1 + i \Gamma' B)^{-1}$

so bekommt man:

$$\Gamma + i\Gamma'B\Gamma = \Gamma' - i\Gamma'A\Gamma$$

$$(1 + i\Gamma'B)\Gamma = \Gamma' + \Gamma'A\Gamma$$

$$\begin{aligned} (1 + i\Gamma'B)^{-1}(1 + i\Gamma'B)\Gamma &= \\ &= (1 + i\Gamma'B)^{-1}\Gamma' + (1 + i\Gamma'B)^{-1}\Gamma'A\Gamma \end{aligned} \quad (A_4.17)$$

$$\Gamma = \Gamma^\omega + \Gamma^\omega A\Gamma$$

Diese Gleichung ermöglicht die Berechnung des Vertex-Anteils Γ für kleine Energie-Impuls Überträge, wenn Γ^ω bekannt ist. Γ^ω ist die Amplitude der Vorwärtsstreuung (Streuwinkel Null) zweier Quasi-Teilchen mit kleinem Energie-Übertrag und Impuls Übertrag gleich Null. Γ^ω ist mit der Funktion f identisch $\Gamma^\omega = f$. Γ^ω ist durch f , die aus Experimenten bestimmt wird, bekannt.

Die Gl. (A₄.17) der Streuamplitude Γ lautet:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; k) &= \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}^\omega(p_1, p_2) + \\ &+ \int \Gamma_{\alpha\xi,\gamma\eta}^\omega(p_1, q) A(q, k) \Gamma_{\eta\rho,\delta\sigma}(q, p_2) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (A_4.18)$$

Da die Kernkräfte unabhängig vom Spin der Teilchen sind, summiert man über die Spin Indizes (das bedeutet Multiplikation mit 2). Im Fall, dass die Funktion Γ^ω von dem Winkel zwischen den Impulsen p_1, p_2 unabhängig ist, ist auch Γ davon unabhängig.

Es gilt:

$$\Gamma = \Gamma^\omega + 2 \Gamma^\omega \Gamma \int A(q, k) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \quad (A_4.19)$$

Daraus folgt

$$\Gamma = \frac{\Gamma^\omega}{1 - 2 \Gamma^\omega \int A(q, k) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}} \quad (A_4.20)$$

Anhang 4c

Der Vertex $\mathcal{T}$ der Pion-Nukleon-Wechselwirkung

In Gl. (4.62) kommt die Vertexfunktion $\mathcal{T}(p, p+k, k)$ vor. Diese beschreibt den Vertex der πNN Wechselwirkung unter Berücksichtigung der Wechselwirkung der Teilchen in der Kernmaterie.

Den Vertex $\mathcal{T}(p, p+k, k)$ kann man graphisch als¹⁹

$$\mathcal{T} = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_0 G G \Gamma \quad (\text{A}_4.21)$$

darstellen, wobei $\mathcal{T}_0$ der Vakuum-Vertex ist, der keine Wechselwirkungen der Teilchen des Systems enthält. Γ ist der Vertex-Anteil, der die Wechselwirkung der Teilchen im System beschreibt (Gl. A₄.9 - A₄.10). Mit anderen Worten, $\mathcal{T}$ ist der Vertex, der den Effekt des Pionen-Feldes auf ein Nukleon in der Kernmaterie charakterisiert.

Den lokalen Vertex $\mathcal{T}^\omega = \lim_{\vec{k}, \omega \rightarrow 0} \mathcal{T}$ kann man analog zu Gl. (A₄.14 - A₄.17) ableiten:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^\omega + \Gamma^\omega A \mathcal{T} \quad (\text{A}_4.22)$$

Der lokale Vertex $\mathcal{T}^\omega$ ist proportional $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}^\omega = e_2 \mathcal{T}_0$, wobei e_2

die effektive "Ladung" der Quasi-Teilchen bezüglich des äusseren (Pion) Feldes ist. In diesem Fall gilt¹⁰⁰ $e_z = 1 - 2\zeta_s \approx 1$ da ζ_s einen vernachlässigbaren kleinen Wert hat.

Also gilt¹⁹:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \Gamma^\omega A \mathcal{T} \quad (\text{A}_4.23)$$

In Analogie zu Gl. (A₄.20) lösen wir (A₄.23):

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}_0}{1 - 2\Gamma^\omega \int A(q, k) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}} \quad (\text{A}_4.24)$$

Für die π NN-Wechselwirkung ist $\mathcal{T}_0$ (Gl. 3.4)

$$\mathcal{T}_{0\alpha} = i f(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \tau_\alpha$$

Da $\mathcal{T}_0 \sim \sigma$ ist, gibt es keine bestimmte Ausrichtung der Spins in dem System. Der Vertex Γ^ω in Gl. (A₄.24) ist durch¹⁹

$$\frac{m^* p_0}{\pi^2} \Gamma^\omega = g^0 \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 + g' (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (\text{A}_4.25)$$

gegeben, wobei p_0 der Fermi Impuls der Kerne ist ($p_0 \approx 2$).

Die phänomenologischen Parameter g^0 und g' werden aus experimentellen Daten gewonnen ($g^0 = 0.5$, $g' = 0.8$)¹⁹.

Für $A(q, k)$ (Gl. A₄.12) gilt:

$$\begin{aligned} i A(q, k) &= A^0 \delta \varepsilon = \left(\int G(q) G(q+k) d\varepsilon \right) \delta \varepsilon = \\ &= \left[i \int 2\pi \frac{n(\vec{q}) - n(\vec{q} + \vec{k})}{\omega - \varepsilon(\vec{q} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{q})} \right] \delta \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A}_4.26)$$

Aus Gl. (A₄.24, A₄.26) folgt

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{I}_0}{1 - 2 \Gamma^\omega \int \frac{n(\vec{q}) - n(\vec{q} + \vec{k})}{\omega - \varepsilon(\vec{q} + \vec{k}) + \varepsilon(\vec{q})} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}} \quad (\text{A}_4.27)$$

Mit Gl. (4.34) wird Gl. (A₄.27) verkürzt geschrieben:

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{I}_0}{1 + 2 \Gamma^\omega \frac{m^* p_F}{2\pi^2} \phi(\omega, k)}$$

oder

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{I}_0}{1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \phi(\omega, k)} \quad (\text{A}_4.28)$$

wobei¹⁹

$$g^- = \frac{m^* p_0}{\pi^2} \Gamma^\omega \simeq 2 g' = 1.6$$

Masssystem: $\hbar = c = m_{\pi} = 1$

$e^2 = 1/137$ elektromagnetische Kopplungskonstante

$f^2 \approx 0.08$ Pion-Nukleon Kopplungskonstante

$m_{\pi^{\pm}} = (139.57 \text{ MeV}) = 1$

$1 \text{ MeV} = 7.1648 \cdot 10^{-3} m_{\pi}$

$1 \text{ fermi} = 1/197.32858 \text{ MeV}^{-1} = 7.07297 \cdot 10^{-1} m_{\pi}^{-1}$

$m_{\text{Nukleon}} = (938.9263 \text{ MeV}) = 6.7272 m_{\pi}$

$m_{\Delta_{33}} = (1232 \text{ MeV}) = 8.8271 m_{\pi}$

$\rho_0 = (0.17 \text{ fm}^{-3}) = 0.48044 m_{\pi}^3$

$1 \text{ MeV pro Teilchen} = 1.16045 \cdot 10^{10} \text{ }^{\circ}\text{K}$

Literaturverzeichnis

1. W. Pieper und W. Greiner, Z. Phys. 218, 327 (1968)
2. L. P. Fulcher, J. Rafelski and W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 27, 958 (1971)
3. B. Müller, H. Peitz, J. Rafelski and W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 28, 1235 (1972)
4. B. Müller, J. Rafelski and W. Greiner, Nuovo Cim. A 18, 551 (1973)
5. M. Soffel, B. Müller and W. Greiner, "Particles in a Stationary Spherically Symmetric Gravitational Field", preprint Frankfurt am Main, 1976
6. M. A. Rudermann, "Physics of Dense Matter" (ed. C. J. Hansen, Dordrecht:Reidel, 1974) p. 117
7. V. Ruck, M. Gyulassy, W. Greiner, Z. Physik A 277, 391 (1976); M. Gyulassy, V. Ruck, W. Greiner, Proceedings of the International Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations IV, Hirschegg, January, 1976, AED-Conf-76-015-000, Technische Hochschule Darmstadt

8. A. B. Migdal, ЖЕТО, 61, 2209-2224 (1971); Sov. Phys. JETP 34, 1184 (1972)
9. A. B. Migdal, Sov. Phys. - JETP 36, 1052 (1973)
10. A. B. Migdal, Nucl. Phys. A 210 (1973) 421-428
11. A. B. Migdal, Phys. Lett. 45 B, 448 (1973)
12. A. B. Migdal, Phys. Rev. Lett. 31, 257 (1973)
13. A. B. Migdal, Phys. Lett. 47 B, 96 (1973)
14. A. B. Migdal, N. A. Kirichenko and G. A. Sorokin, Phys. Lett. 50 B, 411 (1974)
15. A. B. Migdal, N. A. Kirichenko and G. A. Sorokin, JETP Lett., vol. 19, No. 5 (1974)
16. A. B. Migdal, JETP Lett., vol. 19, No. 8 (1974)
17. A. B. Migdal, Phys. Lett. 52 B, 172 (1974)
18. A. B. Migdal, Phys. Lett. 52 B, 264 (1974)

19. A. B. Migdal, O. A. Markin and I. I. Mishustin, JETP , 66, 443 (1974); Sov. Phys. JETP, 39, 212 (1974)
20. A. B. Migdal, ZhETP Pis. Red. 18, No. 7, 443 (1973)
21. A. B. Migdal, G. A. Sorokin, O. A. Markin and I. I. Mishustin, preprint Chernogolovka 1976
22. R. F. Sawyer and D. J. Scalapino, Phys. Rev. D 7, 953 (1973); R. F. Sawyer and A. C. Yao, Phys. Rev. D 7, 1579 (1973); R. F. Sawyer, Phys. Rev. Lett. 31, 1556 (1973); S. P. Brusca and R. F. Sawyer, Nucl. Phys. A 235 (1974) 470-485
23. J. B. Hartle, R. F. Sawyer and D. J. Scalapino, Astro. J. 199 (1975) 471
24. R. F. Sawyer, Mesonic Waves in Nuclear Matter, with Application to Meson Production in Nuclear Collisions, UCSB preprint 1976
25. G. E. Brown and W. Weise, Contributed paper, V. Intern. Conf. on High Energy Physics and Nuclear Structure, Santa Fe (1975)
26. G. E. Brown and W. Weise, Physics Reports 22 C (1975) 279

27. W. Weise and G. E. Brown, Phys. Lett. 48 B (1974) 297
28. G. E. Brown and W. Weise, Physics Reports 27 C (1976)
1 - 34
29. W. Weise and G. E. Brown, Phys. Lett. 58 B (1975) 300
30. G. E. Brown, Proc. of 5th Intern. Conf. on High-Energy
Physics and Nuclear Structure (Uppsala,
Sweden, June 1973), Ed. Gunnar Tibell
(NORDITA Publ. No. 543)
31. S. Barshay and G. E. Brown, Phys. Lett. 47 B (1973) 107;
S. Barshay, V. Rostokin, G. Vagradov and
G. E. Brown, Proc. of 5th Intern. Conf.
on High-Energy Physics and Nucl. Structure
(Uppsala, Sweden 1973) 198 - 199;
S. Barshay, V. Rostokin and G. Vagradov,
Nucl. Phys. B 59 (1973) 189 - 210; S. Barshay,
G. Vagradov and G. E. Brown, Phys. Lett.
43 B (1973) 359
32. G. Baym and G. E. Brown, Nucl. Phys. A 247 (1975) 359-410
33. S. O. Bäckman and W. Weise, Phys. Lett. 55 B (1975) 1
34. G. Baym, D. Campbell, R. Dashen and J. Manassah, Phys.
Lett. 58 B (1975) 304

- 35. D. K. Campbell, R. F. Dashen and J. T. Manassah, Phys. Rev. D 12, 979 (1975); 12, 1010 (1975)
- 36. G. F. Bertsch and M. B. Johnson, Phys. Lett. 48 B (1974) 397
- 37. G. F. Bertsch and M. B. Johnson, Phys. Rev. D 12, 2230 (1975)
- 38. P. W. Anderson, N. Itoh, M. A. Alpar, E. Tosatti, and R. G. Palmer, Lett. Nuovo Cimento, 12, 165 (1975)
- 39. D. F. Goble, Ann. Phys. (N.Y.) 90, 295 (1975)
- 40. G. Baym and E. Flowers, Nucl. Phys. A 222 (1974) 29 - 64
- 41. C. -K. Au and G. Baym, Nucl. Phys. A 236 (1974) 500 - 522
- 42. C. -K. Au, G. Baym and E. Flowers, Phys. Lett. 51 B (1974) 1
- 43. G. Baym, Phys. Rev. Lett. 30, (1973) 1340
- 44. G. Baym and C. Pethick, Ann. Rev. of Nucl. Sci. 25 (1975) 27 - 77

- 45. C.-K. Au, Phys. Lett. 61 B (1976) 300
- 46. D. J. Scalapino, Phys. Rev. Lett. 29 (1972) 386
- 47. J. M. Irvine, Rep. Prog. Phys. 38 (1975) 1385 - 1425
- 48. S. Blaha, Il Nuovo Cimento 25 A, 252 (1975)
- 49. Y. Kitazoe and M. Sano, Lett. al Nuovo Cimento 14, 400
(1975)
- 50. C. G. Kälman, Phys. Lett. 55 B (1975) 178 - 182
- 51. O. Nalcioglu and A. Goswani, Lett. al Nuovo Cimento 15
359 (1976)
- 52. O. A. Markin and I. N. Mishustin, JETP Lett. 20, No. 7
(1974) 226
- 53. M. A. Troitskii, É. E. Sapershtein, O. A. Markin and
I. N. Mishustin, JETP Lett. 21, No. 1
(1975) 44
- 54. E. E. Sapershtein and M. A. Troitskii, JETP Lett. 21,
No. 2 (1975) 62
- 55. N. A. Kirichenko and G. A. Sorokin, preprint, Chernogolovka 1976

56. G. A. Sorokin, JETP Lett. 21, No. 5 (1975) 143
57. A. M. Dyugaev, JETP Lett. 22, No. 3 (1975) 83
58. N. A. Kirichenko and G. A. Sorokin, Phys. Lett. 62 B
(1976) 162
59. N. A. Kirichenko, Sov. Phys. JETP 41, 999 (1976)
60. O. Maxwell and W. Weise, Phys. Lett. 62 B (1976) 159
61. Dieses Kapitel ist weitgehend auf die Referenzen
61 - 75 aufgebaut.
- A. Münster, Statistical Thermodynamics, vol. II
(Springer-Verlag, Berlin, 1974);
- A. Münster, Statistische Thermodynamik kondensierter
Phasen (Band XIII Handbuch der Physik)
(Springer-Verlag, Berlin, 1962);
- A. Münster, Zeitschrift für Physikalische Chemie N. F.,
86 (1973) 230 - 251;
- A. Münster, "Critical Fluctuations", Fluctuation Phenomena
in Solids (ed. R. E. Burgess), Academic
Press, New York, 1965;
- H. Stumpf and A. Rieckers, Thermodynamik (Vieweg + Sohn,
Braunschweig 1976)
62. P. Ehrenfest, Comm. Kammerlingh Onnes Lab., Univ Leiden,
Suppl. 75 b (1933)

63. L. D. Landau, Soviet Phys. JETP, 7, 19 (1937); Collected Papers, Gordon & Breach and Pergamon Press 1965, Ch. 29, p. 193;
L. D. Landau and E. M. Lifschitz, Statistische Physik (Akademie Verlag Berlin, 1975)
64. L. Tisza, "On the Theory of Phase Transitions" p. 1 - 37, edited by Smoluchowski, Mayer and Weyl, J. Wiley, New York, 1951
65. W. Brenig, Statistische Theorie der Wärme (Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg, 1975)
66. H. Eugene Stanley, Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena (Clarendon Press, Oxford, 1971)
67. Kleine Enzyklopädie, Atom (VEB Verlag Enzyklopädie Leipzig, 1970) p. 547
68. A. L. Fetter and J. D. Walecka, Quantum Theory of Many - Particle Systems (McGraw-Hill Co., New York, 1971)
69. H. E. Hall, Solid State Physics (Wiley and Sons LTD., London, 1974)
70. C. Kittel, Einführung in die Festkörperphysik (R. Olden- burg Verlag München, 1973, Wiley, Frankfurt)

- 71. H. Haken, Rev. Mod. Phys. 47, 67 (1975)
- 72. M. K. Wilkinson and C. G. Shull, Phys. Rev. 103, 576 (1959)
- 73. C. G. Shull, W. A. Strauser and E. O. Wollan, Phys. Rev. 83, 333 (1951)
- 74. A. Münster und K. Sagel, Z. phys. Chem., N. F. 12, 145 (1957)
- 75. C. A. Croxton, Introduction to Liquid State Physics (Wiley, London, 1975)
- 76. V. R. Pandharipande and R. A. Smith, Nucl. Phys. A 237 (1975) 507 - 532
- 77. V. Canuto and S. M. Chitre, Phys. Rev. D 9, 1587 (1974)
- 78. V. Canuto and S. M. Chitre, "Quantum Crystals in Neutron Stars" (C. J. Hansen (ed.), Physics of Dense Matter, 133 - 150. Copyright 1974 by the IAU)
- 79. H. G. Baumgardt, J. U. Schott, Z. Sakamoto, E. Schopper, H. Stöcker, J. Hofmann, W. Scheid and W. Greiner, Z. Physik A 273, 359 (1975)

80. J. Hofmann, H. Stöcker, M. Gyulassy, V. Ruck, W. Scheid, W. Greiner, H. G. Baumgardt, J. U. Schott and E. Schopper, Proceedings of the XI th International School on Nuclear Physics, Predeal, Romania, August 1976
81. T. D. Lee and G. C. Wick, Phys. Rev. D 9, 2291 (1974)
82. T. D. Lee, "Abnormal nuclear states and vacuum expectation", invited talk given at the "Annual Bevatron Users Meeting", Lawrence Berkeley Laboratory, January 1974;
T. D. Lee, "Abnormal nuclear states", talk given at the XVII International Conference on High Energy Physics, London, July 1974
83. M. Corti and V. Degiorgio, Phys. Rev. Lett. 36, 1173 (1976)
84. H. A. Bethe, Ann. Rev. Nucl. Sci. 21 (1971) 93
85. J. Hüfner and F. Iachello, Nucl. Phys. A 247 (1975)
441 - 451
86. J. Hüfner, MPI H - 1975 - U 1
87. T. E. O. Ericson and J. Hüfner, Phys. Lett. 33 B, 601 (1970)
88. G. Baym, Lectures on Quantum Mechanics (W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass. 1973)

- 89. A. L. Fetter and J. D. Walecka, Quantum Theory of Many - Particle Systems (McGraw-Hill Co., New York, 1971) p. 158

- 90. A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinski, Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics (Prentice-Hall, Inc. 1963)

- 91. M. Ericson and T. E. O. Ericson, Ann. Phys., New York 36, 323 (1966)

- 92. A. B. Migdal, Theory of finite Fermi-Systems (Interscience, New York, 1967)

- 93. A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinskii, Soviet Phys. JETP, 36, 9 (1959)

- 94. T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. 14, 351 (1955)

- 95. Dieser Abschnitt basiert weitgehend auf Ref. 90 (Kap. 3, sec. 14.2)

- 96. L. D. Landau, Soviet Phys. JETP, 3, 920 (1956); Collected Papers, Gordon & Breach and Pergamon Press, 1965, Ch. 90, p. 723

97. L. D. Landau, Soviet Phys. JETP, 5, 101 (1957); Collected Papers, Gordon & Breach and Pergamon Press, 1965, Ch. 91, p. 731
98. A. B. Migdal, Soviet Phys. JETP, 5, 333 (1957)
99. A. A. Abrikosov and I. E. Dzyaloshinskii, Soviet Phys. JETP, 8, 535 (1959)
100. A. B. Migdal, Theory of Finite Fermi Systems (Interscience, New York 1967)
101. L. D. Landau, Sov. Phys. JETP 8, 70 (1959); Collected Papers, Gordon & Breach and Pergamon Press, 1965, Ch. 95, p. 752
102. R. D. Mattuck, A Guide to Feynman Diagrams in the Many Body Problem (McGraw-Hill Co., London 1967)
103. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, New York, 1971, fifth printing); Gl. 2.729
104. H. Eyring, D. Henderson, B. Stover and E. M. Eyring, Statistical Mechanics and Dynamics (John Wiley & Sons Inc., New York 1964)

105. IBM Application Program, GH20-0205-4, System / 360
Scientific Subroutine Package, Version III,
Programers Manual, Program Number
360A - CM - 03X; Subroutine DQG 12
- V. I. Krylov, Approximate Calculation of Integrals,
(Macmillan, New York/London, 1962)
p. 100 - 111 und 337 - 340
106. N. Levinson and R. M. Redheffer, Complex Variables
(Holden-Day Inc., San Francisco, 1970)
107. D. Pines and P. Nozières, The Theory of Quantum Liquids,
vol. I (W. A. Benjamin Inc., New York
1966)
108. D. F. DuBois, Ann. Phys. 7, 174-237 (1959)
109. Ref. 107, Seite 320
110. A. Suzuki, Y Futami and Y. Takahashi, Prog. Theor. Phys.
54 (1975) 1429
111. W. Fennel and H. P. Wilfer, Ann. Physik, Leipzig 32 (1975)
265-276
- D. Kremp, W. D. Kraeft and W. Fennel, Physica 62 (1972)
461-473
- W. Fennel, W. D. Kraeft and D. Kremp, Ann. Physik,
Leipzig 31 (1974) 171-181

- 112. Takashi Kanai, Pion Condensation I, II. Preprint, Dept. of Physics, Nagoya Univ., Japan, DPNU-20-76, DPNU-44-1976
- 113. J. D. Walecka, Phys. Lett. 59 B (1975) 109
- 114. Katuro Sawada and Nobuyuki Fukuda, Progress of Theoretical Physics, Vol. 25, No. 4 (1961) 653
- 115. Fumiaki Iwamoto and Katuro Sawada, Phys. Rev. 126 (1962) 887
- 116. Nobuyuki Fukuda, Nucl. Phys. 44 (1963) 553-571
- 117. C. B. Dover and R. H. Lemmer, Phys. Rev. 165 (1968) 1105; 183 (1969) 908
- 118. M. I. Sobel, P. J. Siemens, J. P. Bondorf, H. A. Bethe, Nucl. Phys. A 251, 502 (1975)
- 119. G. F. Chapline, M. H. Johnson, E. Teller and H. A. Bethe, Phys. Rev. D 8 (1973) 4302
- 120. W. Scheid, H. Müller and W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 741
- 121. M. J. Klein and L. Tisza, Phys. Rev. 76 (1949) 1861

- 122. M. E. Fisher, J. Math. Phys. 5 (1964) 944
- 123. M. Gyulassy and W. Greiner, Critical scattering and pionic instabilities in heavy ion collisions, preprint Frankfurt
- 124. Piet-tjing Ong, Dissertation, Frankfurt 1976
- 125. V. S. Popov, JETP Lett. 16 (1972) 251;
M. S. Marinov and V. A. Popov, Sov. Phys. JETP 41 (1975) 205
- 126. S. W. Hawking, Phys. Rev. D 14 (1976) 2460
- 127. Ref. 68, Seite 304
- 128. J. Speth, $g = 0.56$; siehe Ref. 129
- 129. S. O. Bäckman and W. Weise, Pion Condensation and the Pion-Nuclear Interaction, to be published in: "Mesons in Nuclei", M. Rho and D. Wilkinson, editors

Zum Schluss danke ich Herrn Professor Dr. Walter Greiner sehr herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, für wertvolle Ratschläge und Kritik sowie für sein stetes Interesse an ihrem Fortgang.

Meinem Mann Dr. Herbert Ruck und Herrn Dr. Miklos Gyulassy danke ich für klärende Gespräche, meinem Kollegen Wolfgang Schäfer für die kritische Durchsicht des Manuskriptes.

Frau Brigitte Utschig danke ich für die Anfertigung der Photographien und die Zeichnung der Diagramme und Figuren, Herrn Werner Brose für den Druck der Arbeit.

Während der numerischen Auswertung der Formeln wurde ich vom Team des GSI Rechenzentrums Darmstadt freundlich beraten.

Lebenslauf

Am 13. März 1950 wurde ich - Viola Ruck geb. Szász - als Tochter des Dr. med. Tibor Szász und der Dipl.-Volkswirtin Viola Szász in Klausenburg, Siebenbürgen, geboren. Hier besuchte ich von 1957 - 1962 die deutsche Grundschule und von 1962 - 1967 das "Nicolae Balcescu" Lyzeum. Zwei Jahre vor Beendigung des lyzealen Studiums (1967 - 1969) wurde ich nach einem Auswahlverfahren in eine Sonderklasse des "Emil Racovita" Lyzeums in Klausenburg, mit intensivem Physik- und Mathematikunterricht, versetzt, wo ich im Juni 1969 das Abitur ablegte.

Von Oktober 1969 bis Juni 1972 studierte ich Physik, Mathematik und Chemie an der "Babes - Bolyai" Universität Klausenburg, wo ich die Prüfungen 1971 - 1972 mit Auszeichnung bestand. Im September 1972 erhielt ich ein Stipendium am "Massachusetts Institute of Technology" (M.I.T.), Cambridge, Mass., U. S. A., wo ich im Juni 1973 den akademischen Grad "Bachelor of Science" (B.S.) in Physik erwarb.

Von Oktober 1973 bis Juni 1974 studierte ich als Stipendiat des "Wien International Scholarship Program" an der "Brandeis University", Waltham, Mass., U. S. A., betätigte mich dort als Assistent ("teaching assistant") und erwarb den akademischen Grad "Master of Arts" (M.A.) in Physik.

Im Juni 1974 kam ich in die Bundesrepublik Deutschland und wurde deutscher Staatsbürger. Seit September 1974 studiere

ich an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt/M.
Physik, Mathematik und Chemie und bereite meine Promotion in
Physik vor.

Meine akademischen Lehrer waren:

Prof. Walter Greiner, Prof. Sergio Fubini, Prof. Herman
Feshbach, Prof. Silvan S. Schweber, Prof. Howard J. Schnitzer,
Prof. Peter Heller, Prof. Lawrence Schwartz, Prof. Kenneth A.
Johnson, Prof. George F. Koster, Prof. David H. Frisch,
Prof. Roman W. Jackiw, Prof. Norman Levinson, Prof. Zoltan
Gábos, Prof. Mircea Draganu, Prof. Victor Mercea,
Prof. Alexandru Bodi, Prof. Erwin Schechter, Prof. Ion Stan,
Prof. Iuliu Pop, Prof. Hariton Tintea, Prof. Alexandru Nicula,
Prof. Maria Cristea, Prof. Mircea Vasiu, Prof. Szilágyi,
Prof. Calina Mare.

